И. Н. КАВУН
Н. С. ПОПОВА

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

МОСКВА · 1936 · ЛЕНИНГРАД

И. Н. КАВУН и Н. С. ПОПОВА

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ

ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ
И СТУДЕНТОВ ПЕДТЕХНИКУМОВ

Утверждено
Наркомпросом РСФСР

Издание 2

МОСКВА 1936 ЛЕНИНГРАД

Эта книга заключает в себе сравнительно небольшую по объему общую часть и обширную специальную часть — методику преподавания арифметики в начальной школе по годам обучения.

Обе эти части составляют единое целое: основные принципиальные установки, данные в начале книги, раскрываются и конкретизируются в последующих главах. Поэтому, желая успешно преподавать арифметику в одном из классов начальной школы, учитель должен ознакомиться со всеми разделами книги.

Вопрос о задачах не затрагивается в общей части — он изложен в специальной части по годам обучения. Тем более важно, чтобы учитель ознакомился не с одной какой-нибудь частностью в развитии этого вопроса, но со всем материалом в целом.

Производственные планы для каждого года обучения, а также образцы рабочих планов и примерные разработки уроков, будут выпущены дополнительно, в виде особого приложения.

Настоящая книга предназначается для учителей начальной школы и для учащихся педтехникумов, но может быть полезна и для студента педвуза, так как построена на достаточно солидном научном фундаменте.

Части этой книги „Общая часть“, „Третий год обучения“ и „Четвертый год обучения“ составлены *И. Н. Кавуном*.

Разделы этих частей: „Организация работы“, „Учет работы“, „Измерение времени и решение задач на время“, „Устные вычисления“ (340–342), „Сложение и вычитание десятичных дробей“ — составлены Н. С. Поповой. Весь остальной материал книги составлен Н. С. Поповой.

Цена 3 р. 60 к. Переплет 50 к.

Отв. редактор *И. П. Иванов*. Техн. ред. *Т. В. Иванова*. Корректор *В. А. Острогский*. Следил за переизданием технич. редактор *П. И. Берлов*.

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТОДИКЕ АРИФМЕТИКИ.

ЗАДАЧИ И СОДЕРЖАНИЕ МЕТОДИКИ АРИФМЕТИКИ.

Определение методики арифметики. Каждый учитель арифметики обязан знать свой предмет, как научную дисциплину: качество знаний учителя непременно скажется на качестве знаний его ученика. Однако этого еще недостаточно: можно знать предмет и не уметь его преподавать, особенно детям. Поэтому учитель должен не только знать арифметику, но и владеть такими средствами ее преподавания, чтобы ученики интересовались этим предметом, понимали, твердо усваивали и умели применять его в жизненной практике, в технике и в других областях знаний. *Изучение этих средств и составляет задачу методики арифметики.*

Содержание методики арифметики. Методика арифметики отвечает на следующие вопросы, относящиеся к изучению арифметики: *зачем* учить, *чему* учить, *как* учить, *как* организовать обучение.

Отвечая на первый вопрос, необходимо исследовать цель обучения арифметике, так как целью обуславливается и система изучаемых понятий и метод обучения.

Отвечая на второй вопрос, следует произвести отбор тех понятий, которые подлежат изучению; а затем сделать краткое их обоснование, которое могло бы служить исходной точкой при выработке методов обучения.

Изложение методов обучения арифметике послужит ответом на третий вопрос — как учить.

Если к перечисленным здесь задачам присоединить организацию обучения арифметике, то получится полный круг основных вопросов, составляющих содержание методики арифметики, которое можно исчерпать следующими главными темами.

Общая часть.

1. Задачи и содержание методики арифметики.
2. Цель обучения арифметике.
3. Содержание школьного курса арифметики и система арифметических понятий. В частности системы понятий: а) о целом числе и об арифметиче-

ских действиях над целыми числами; б) о дроби и о действиях над дробями; в) об элементах геометрии.

4. Методы обучения арифметике.

5. Организация преподавания арифметики.

Специальная часть.

1. Первый год обучения арифметике.
2. Второй год „ „
3. Третий год „ „
4. Четвертый год „ „

Задачи методики арифметики в советской школе. Советская школа в ряду своих основных задач ставит две важнейшие задачи: „систематическое и прочное усвоение наук“ и „связь теории с практикой“. Эти задачи являются основными и для методики арифметики.

Первая задача расчленяется на ряд частных вопросов, перечисленных в главе о содержании методики арифметики. Вопросы о системе арифметических понятий, о программе курса арифметики, о методах и об организации обучения арифметике, а также частные вопросы методики арифметики — решаются на основе данных математики, психологии и теории познания, и решения их проверяются при помощи педологически-правильно поставленного школьного эксперимента.

Вторая задача — о связи теории с практикой имеет для советской школы особо важное значение. Практическую сторону курса арифметики составляют задачи, содержание которых в СССР заимствуется из нового быта и строительства. Вследствие этого у учащихся воспитываются представления причинной связи между теорией и практикой, которые должны послужить началом образования материалистического мировоззрения. „Если мы достигнем, — говорит Ленин, — нашей цели, если вещь даст тот результат, который от нее ожидали, тогда мы имеем положительные доказательства, что наши восприятия о вещи совпадают с существующей вне нас действительностью“.

Основное отличие советской методики от зарубежной и заключается в том, что первая опирается на диалектико-материалистическую теорию познания и на практику нового быта и социалистического строительства, вторая — на идеалистическую теорию познания и на практику буржуазного общественного и государственного строя. Так, немецкая методика Гизелера и Петри начинается словами: „Арифметика есть звено в цепи учебных предметов, которое должно в своей части содействовать достижению цели воспитывающего обучения — образованию религиозно-этического характера“.

В отличие от этого идеалистического понимания задач методики арифметики, у нас во вводной записке к программе арифметики НКП говорится: „изучение математики должно быть так поставлено, чтобы число и мера служили в руках детей орудием для познания окружающей действительности, для осмысливания дела социалистического строительства, средством для лучшего участия детей в общественной работе и для подготовки их к обороне страны“.

Методика арифметики, как наука. Математика, как наука и как учебный предмет существует и преподается детям, юношам и взрослым в течение многих столетий. Но методика начального обучения арифметике стала создаваться только в XIX ст. До этого времени каждый преподаватель изобретал собственные методы, переоткрывая заново и такие методы, которые уже были изобретены другими. Если преподаватель обладал педагогической проницательностью и достаточным математическим образованием, то преподавание у него шло удовлетворительно. В противном случае и чаще всего — методы преподавания были негодные, и результаты получались слабые. В XIX столетии, главным образом в Германии, а затем и в России, явился ряд выдающихся исследователей, создавших стройное учение о методах преподавания начальной арифметики, которое подняло практику преподавания этого предмета на значительную высоту. Однако этому учению многого еще не хватало, чтобы стать наукой. Творцы этого учения руководились, главным образом, усмотрением, основанным на их богатых наблюдениях, отчасти же общими педагогическими принципами. Им не хватало еще научного эксперимента, научной проверки: усмотрение, хотя бы и обогащенное наблюдениями, недостаточно, чтобы создать науку. В XX ст. исследователи, главным образом в Америке, начинают прибегать к научному эксперименту, который уже дал некоторые результаты.[1] Какое же можно сделать предсказание относительно будущего методики арифметики, как науки?

Образование науки обусловлено тремя факторами: потребностью в ней, наличностью содержания и метода научного исследования. Есть ли потребность в особой науке — методике арифметики? Можно ли говорить о ее содержании? Существуют ли у нее методы исследования?

В любой момент суток в разных точках земной поверхности протекают в среднем 200 000 уроков математики. Столько же преподавателей разной одаренности и опытности обучают в этот момент математике около 6 миллионов детей и юношей. Из этих преподавателей большинство со средней одаренностью и средней педагогической квалификацией, многие из них начинающие, мало опытные.

---

[1] The National Council of Teachers of Mathematics. 2-nd Yearbook, стр. 73. Новое в американской методике арифметики, ред. Г. Б. Поляка, 1932, стр. 5.

Если бы не существовало никаких методических руководств, то эти преподаватели вынуждены были бы изобретать на свой риск и страх, по своему разумению собственные свои методы. Получались бы неудовлетворительные результаты их работы, от чего страдали бы дети, школа и государство. Наоборот, если бы существовала методика, научно-обоснованная и поэтому более или менее общезначимая, то преподавателю пришлось бы еще много работать, чтобы приобрести опыт, но он в своей практике исходил бы из твердо установленных научных основ и не должен был бы повторять неверные пути, уже испробованные другими. Так же точно молодой врач вооружается в своей врачебной практике опытом, отправляясь от теоретических познаний, усвоенных им в школе и из книг. Все эти соображения приводят нас к выводу, что *потребность в науке о методах обучения арифметике существует*.

Ответим на другой вопрос: существует ли содержание методики арифметики. Содержание ее составляют, с одной стороны, выбор, обоснование и систематизация арифметических понятий, подлежащих изучению, с другой — методы и организация преподавания математики. В первой части методика арифметики опирается на данные математики, во второй — на теорию познания и психологию. Но ни одна из названных наук не занимается вопросами преподавания арифметики: эти вопросы и должны составлять *содержание особой специальной науки*.

Остается еще ответить на вопрос о методах научного исследования преподавания арифметики. Методика арифметики распадается на множество тем, и каждая тема должна подвергнуться сперва теоретической обработке на основе математической теории, теории познания, психологии и педологии. Это — дедуктивный метод исследования. Выработанная теория подлежит опытному педологическому испытанию в школе: это — индуктивный метод исследования. В итоге этих исследований вырабатывается научная теория.

Но возможна ли наука о преподавании математики? Все явления жизни и деятельности человека доступны научному исследованию, а потому возможна наука о преподавании любого предмета.

Итак, методика арифметики обладает *методами научного исследования*. Научная работа над вопросами обучения арифметике уже ведется и сейчас, она будет продолжаться и обогащаться, в результате чего создастся — в этом нельзя сомневаться — наука о методах обучения арифметике.

ЦЕЛЬ ОБУЧЕНИЯ АРИФМЕТИКЕ.

Образовательная цель. Ближайшая цель обучения арифметике в начальной школе состоит в том, чтобы научить детей называть и записывать целые числа, сознательно производить над целыми числами четыре основные арифметические действия, выполнять некоторые действия над простейшими и над десятичными дробями, применять арифметические действия к решению задач. Эти элементы арифметических знаний представляют

собой *систему* понятий, находящихся между собою в причинной и генетической связи: понятия сложения образуются на основе числового ряда; понятия умножения вытекают из сложения; понятия вычитания и деления, как действий обратных сложению и умножению, берут свое начало от этих действий.

В процессе производства действий возникают представления об их *законах*, которые в начальной школе остаются еще не высказанными, не облеченными в форму точной арифметической речи, но все же существуют в сознании учащихся и применяются ими при вычислениях, в особенности устных. Система арифметических понятий ученика представляет собой зачатки научного мышления, отличного от привычного ему обыденного мышления. Поэтому изучение арифметики является верным средством для развития мышления, надежным путем к умственной культуре.[1]

Разовьем эту мысль подробнее и конкретнее. Начальная арифметика дает материал для *индуктивного* и *дедуктивного* мышления, так как общие суждения в ней, образуясь из частных конкретных примеров, становятся затем основой для других частных суждений. Так, решая ряд примеров и задач, относящихся к делению, учащиеся усваивают понятия о делении, как о действии, обратном умножению (индуктивный процесс). Этим понятием они пользуются при делении. Например, деля 375 на 75, они подбирают частное путем умножения (дедуктивный процесс).

Занятия арифметикой дают поводы для развития способности *обобщения* и *отвлечения*. Так, дети, оперируя с предметами счета и с конкретными числами, различают два вида деления, как две обособленные операции. Затем постепенно эти операции объединяются в одно отвлеченное и общее понятие деления, обобщающее оба вида деления.

При надлежащем методе обучения арифметике у учащихся вырабатывается сознание связи между понятиями: арифметических действий с нумерацией и с другими основными понятиями, действий над дробями с представлением дроби и т. д.

Ребенок, поступающий в начальную школу, не обладает еще умением передавать ход своих мыслей и нередко принимает результат своего суждения за точку его отправления. Одному ученику была предложена задача:

От 7 *м* ленты отрезали 1 *м*, остаток разрезали на два равные куска. Какой длины каждый кусок?

---

[1] Dr. W. Lietzmann. — Methodik des mathematischen Unterrichts.1926. T. 1 (стр. 52).

Когда его спросили, как он будет решать задачу, он ответил, что он прибавит 3 *м* к 3 *м* и еще 1 *м*.

Этот ребенок принял результат суждения за его начало.

В течение четырех лет дети успевают перерешать множество примеров и задач возрастающей сложности. Объясняя решения этих задач и примеров, они, с одной стороны, усваивают ряд технических слов и оборотов речи, а с другой, учатся наблюдать за своими собственными мыслями, приводить их в правильную последовательность и более или менее правильно выражать их. Всякая неправильность в мышлении или неточность в речи легко обнаруживается и исправляется, и таким образом занятия арифметикой развивают способность *последовательного мышления* и *точной речи*.[1]

Кроме числовых понятий, дети приобретают в начальной школе некоторые геометрические понятия, относящиеся к простейшим геометрическим фигурам.

Итак, изучая арифметику, дети овладевают элементарными знаниями числовых и геометрических отношений и, кроме того, приобретают зачатки математического мышления.

Возникает вопрос, оказывает ли влияние развитие математического мышления на общее умственное развитие ребенка. На этот вопрос можно ответить условно утвердительно: если арифметика преподается так, что она находится в постоянной связи с жизнью и с другими областями знания, то общее умственное развитие несомненно выигрывает от развития математического мышления, которое в этом смысле является предпосылкой для развития общего научного мышления.

Практическая цель. Изучение теории в курсе арифметики все время сочетается с практикой: — решение задач, заимствованных из жизни, из других учебных предметов, из практики социалистического строительства, проведения расчетов, связанных с трудовой деятельностью ребенка в школе, и вообще решение каких бы то ни было задач, служащих для развития и закрепления теоретического курса арифметики.

Учащиеся, оканчивающие начальную школу, должны быть вооружены твердыми вычислительными навыками в области целых чисел и умением производить простейшие операции с дробями. Они должны обладать навыками в решении сложных, но незамысловатых задач.

Выше была высказана мысль, что математическое мышление содействует общему развитию учащихся, если они пользуются им для решения задач, заимствованных из практики быта и социалистического строительства и из других учебных предметов. Эти задачи служат верным средством познания действи-

[1] Сравни: Пиаже, — Речь и мышление ребенка, гл. IV, 1932 г.

тельности. Чтобы проникнуться этой мыслью, достаточно прочесть любую задачу из современных задачников и представить себе процесс решения ее.

Два грузовых автомобиля при перевозке зерна израсходовали вместе 6 *кг* 300 *г* бензина. Какое расстояние прошли автомобили, если на 1 *км* пути один из них расходует 170 *г* бензина, а другой на 80 *г* больше?

Для решения этой задачи надо представить себе два автомобиля, расходующие указанное количество бензина; надо представить себе, что расстояние они прошли одинаковое, а бензину один из них израсходовал больше, а другой меньше и т. д. Все эти представления должны быть ярки, отчетливы, в противном случае задача не может быть решена. Задача отображает часть жизни, которую учащиеся познают в количественной и качественной форме. Разнообразные задачи знакомят их с действительностью в ее многообразии. Ряд задач в наших задачниках отражают технику и производство. Если они подобраны планомерно — так, чтобы учащиеся, решая их, могли знакомиться с главнейшими этапами производства — добыванием и подвозом сырья, источником энергии и выпуском фабриката, с преимуществами машинного труда перед ручным и т. д., то такие задачи будут служить одним из средств политехнического образования.

Образовательную и практическую цели обучения математике мы отделили одну от другой ради удобства их описания. В действительности к обеим этим целям ведет единый процесс обучения, который ясно выражен словами Ленина: „от живого созерцания к абстрактному мышлению, а от него к практике“.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА АРИФМЕТИКИ В ШКОЛЕ ПЕРВОЙ СТУПЕНИ.

Система арифметических понятий. Как бы ни был прост и элементарен курс арифметики, преподаваемый детям, он должен представлять собой систему связанных между собой понятий (стр. 7).

Система арифметических понятий, изучаемых в школе первой ступени, может быть представлена в виде трех групп понятий: 1. понятия о целом числе и об основных действиях над целыми числами; 2. первоначальные понятия о дробном числе и об основных действиях над дробями; 3. понятия о простейших геометрических фигурах, об измерении и системе мер, о действиях над составными именованными числами. Соответственно этим трем группам понятий учащийся должен приобрести за 4 года обучения:

1. Твердые знания и навыки в производстве четырех арифметических действий над целыми числами.

2. Первоначальные сведения об обыкновенных и десятичных дробях.

3. Элементарные сведения из области наглядной геометрии, измерительные навыки, твердое знание системы мер, особенно метрической, и четырех действий над составными именованными числами.

Ступенчатость (концентричность) курса арифметики. Арифметические понятия образуются и формируются постепенно и длительно. Процесс их образования неотделим от процесса усвоения вычислительных приемов и приобретения вычислительных навыков.

Для пояснения этой мысли сделаем беглый обзор образования понятий действия сложения.

Складывая числа, сумма которых не превышает десятка, дети научаются соединять присчитываемые единицы в группы.

$$3 + 4 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 3 + 2 + 2 = 7.$$

Складывая позднее однозначные числа, сумма которых превышает десяток, снова прибегают к группировке единиц второго слагаемого.

$$7 + 6 = 7 + 3 + 3 = 13.$$

Складывая на втором году двузначные числа, учащиеся группируют единицы обоих слагаемых сообразно с десятичным составом чисел:

$$27 + 15 = (20 + 7) + (10 + 5) = (20 + 10) + (7 + 5) = 30 + (10 + 2) = 42.$$

На третьем году, при сложении многозначных чисел, складывают соответствующие их разряды.

$$3274 + 675 = (3000 + 200 + 70 + 4) + (600 + 70 + 5) = 3000 + (200 + 600) +$$
$$+ (70 + 70) + (4 + 5) = 3000 + 800 + (100 + 40) + 9 = 3000 + (800 + 100) +$$
$$+ 40 + 9 = 3949.$$

Завершаются приобретенные таким образом учащимися понятия уже на пятом и на шестом году обучения, где законы арифметических действий выражаются при помощи правил или буквенных тождеств.

Из приведенного здесь примера мы усматриваем, что основные понятия действия сложения вырабатываются в течение ряда лет и непременно в связи с вычислительными приемами сложения, по мере расширения числовых областей.

Чтобы достичь постепенного формирования понятий и усвоения вычислительных приемов, надо начальный курс арифметики расположить по ступеням.

Ступени эти называют иногда концентрами. Перечислим здесь ступени курса целых чисел, оправданные и практикой и теоретическими соображениями.

Первая ступень — счет, цифры, сложение и вычитание в пределах десятка.

Вторая ступень — нумерация и арифметические действия в пределах двух десятков.

Третья ступень — нумерация и арифметические действия в пределах сотни.

Четвертая ступень — нумерация и действия в пределах тысячи.

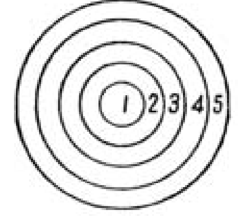
Пятая ступень — нумерация и арифметические действия над числами любой величины.

В пользу ступенчатого построения курса арифметики приводят обыкновенно следующие доводы:

На каждой ступени обучения понятия имеют ту степень отвлеченности и общности, которая соответствует умственному развитию учащихся.

Каждая следующая ступень, давая учащимся новые знания, охватывает вместе с этим все предыдущие ступени. Поэтому ученик возвращается к одному и тому же понятию неоднократно и вполне им овладевает.

На чертеже представлена геометрическая иллюстрация ступеней или концентров.



Черт. 1.

Анализ программы арифметики НКП. Изложим общие основания программы арифметики НКП.

1. В программах НКП все содержание арифметики распределяется по годам и по четвертям. Каждый год этой программы включает все три группы понятий, о которых было сказано выше (стр. 9), т. е. Арифметику целых чисел, дробей и измерения. Каждая четверть включает арифметику целых чисел и измерения.

2. Каждый год начинается повторением пройденного в предыдущем году и заканчивается повторением пройденного в истекшем году.

3. Центральное место на всех годах обучения занимает арифметика целых чисел.

4. Преобладающее место и значение имеют вычисления. Устные вычисления проводятся настойчиво через все четыре года. В первые два года вычисления производятся только устно. На третьем и четвертом году изучаются письменные механизмы арифметических действий.

5. Система арифметических понятий и вычислительных приемов развертывается в строгой последовательности по ступеням: каждая новая ступень основывается на хорошо проработанных и твердо усвоенных предшествующих ступенях, каждое новое понятие вырастает из предыдущих понятий.

6. Арифметика целых чисел располагается по годам следующим образом:

Главное содержание курса п е р в о г о г о д а составляют концентры первого и второго десятка.

Кроме них в программу включены простейшие случаи сложения и вычитания в пределах сотни. В этом году дети вполне овладевают таблицами сложения и вычитания, начинают изучение таблиц умножения и деления и знакомство с понятиями четырех арифметических действий.

На втором году главное содержание курса составляет концентр первой сотни. Кроме того к этому году отнесены простейшие случаи устных действий в пределе тысячи. На втором году дети усваивают вполне понятия и таблицы арифметических действий и овладевают основными устными приемами вычисления.

На третьем году вырабатываются письменные механизмы арифметических действий в пределах миллиона, при этом большое внимание обращается на аккуратные и изящные записи.

На четвертом году навыки в производстве письменных действий над числами любой величины укрепляются, понятия об арифметических действиях углубляются и оформляются; изучаются определения арифметических действий и соотношения между прямыми и обратными арифметическими действиями.

7. Арифметика дробей располагается по годам таким образом:

На втором году дети знакомятся с половиной, четвертью и восьмой. Из долей составляются дроби. Этот процесс образования дробей делает возможным переход к сложению и вычитанию дробей, составленных из равных долей единицы.

На третьем году расширяется понятие сложения и вычитания простейших дробей: дети изучают случай сложения и вычитания простейших дробей, когда знаменатель одной дроби есть число кратное других знаменателей.

На четвертом году проходят сокращенный курс десятичных дробей, исключая умножение и деление дробей, и весьма сокращенный курс обыкновенных простейших дробей, исключая умножение и деление этих дробей.

8. Элементы геометрии и измерение распадаются по годам так:

На первом году дети усваивают образы прямой и кривой линии, фигуры — прямоугольник, треугольник, круг, и тела — куб, брусок и шар; учатся измерять метром; получают первые представления о килограмме и литре.

На втором году область измерения расширяется: дети знакомятся с километром, с мерами времени и с мерами веса.

Измерения производят не только в классе, но и на местности.

На третьем году меры, изученные в предыдущих годах, приводятся в систему и дополняются мерами площади. Содержание измерительных работ составляет главным образом измерение площадей прямоугольных фигур.

На четвертом году — область измерения расширяется знакомством с измерением объема прямоугольного параллелепипеда и с кубическими мерами.

В этом году дети производят измерения на местности, вычерчивают планы и измеряют площади многоугольных участков земли с прямыми углами.

9. В процессе измерения дети получают осязательные представления о мерах, приобретают понятия о составном именованном числе и навыки в действиях над этими числами.

СИСТЕМА И РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЙ ЧИСЛА И АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ.

НУМЕРАЦИЯ.

Цель нумерации. Ряд целых чисел неограничен, а тех чисел, которые употребительны в жизни и в науке, весьма много, и если бы каждое число требовало особого названия и особого знака, человек оказался бы бессильным, чтобы удержать их в своей памяти.

Нумерация есть учение о способах названия и письменного обозначения целых чисел с помощью немногих слов и немногих знаков. Обыкновенно различают устную и письменную нумерацию. Устная нумерация есть учение о названии чисел с помощью немногих слов; письменная нумерация есть учение о записи чисел при помощи немногих знаков.

Устная нумерация. Средством, сокращающим число слов, необходимых для названия чисел, служит группировка единиц в множества: единицы множества соединяют в группы, которые получают особые названия. Каждое из чисел до известного предела имеет особое название. В современной нумерации первые десять чисел называются каждое особым именем. Для названия чисел, больших десяти, единицы множества соединяют в десятки, и десятки считают до десяти десятков так же, как считаются простые единицы. А именно: десяток (десять), два десятка (двадцать), три десятка (тридцать), четыре десятка (сорок) и т. д.

Благодаря этому для названия всех чисел, начиная от одиннадцати (один и десять) до девяносто девяти (девятьдесять и девять) иных слов, кроме первых десяти, не требуется.

Совокупность единиц, заключающихся в 10 десятках, получает особое название — сто, сотня. Для названия чисел, бóльших сотни, единицы множеств соединяют в сотни, которые считают от одной до десяти сотен так же, как простые единицы. Благодаря этому для названий всех чисел, начиная от ста и до девятисот девяноста девяти, новых слов, кроме слова „сто“ не требуется.

Множество единиц в 10 сотен получает особое название — тысяча. Для названия чисел, бóльших тысячи, их единицы соединяют в тысячи, которые считают до 10 тысяч так же, как и простые единицы. Благодаря этому новых слов, кроме тысячи, в известных пределах счета не требуется.

Если бы мы продолжали тот же путь в выборе названий для новых групп единиц, то мы должны были бы назвать особым словом 10 тысяч и 10 де-

сятков тысяч. В древне-русском языке такие слова существовали: десяток тысяч назывался „тьма“, и десяток десятков тысяч — „легион“. Тогда требовалось для названия всех чисел до миллиона четырнадцать слов: один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять (десяток), сто (сотня), тысяча, тьма, легион.

Для дальнейшего сокращения слов, служащих для названия чисел, условимся счет тысяч производить от одной до девятисот девяноста девяти тысяч так же, как мы считали единицы от единицы до девятисот девяноста девяти. Тогда особых названий „тьмы“ для десятка тысяч и „легиона“ для десяти десятков тысяч не потребуется. Назовем число, заключающее тысячу тысяч единиц, словом миллион и будем миллионы считать от одного до девятисот девяноста девяти миллионов так же, как и единицы от одной до девятисот девяноста девяти единиц. Тогда для названия всех целых чисел до миллиарда (включительно) потребуется всего четырнадцать слов.

Такая экономия в числительных именах достигнута благодаря *группировке единиц*, из которых составляются числа. *Группы единиц*, из которых мы составляли множества, были двоякого рода — *десятичные* и *тысячные*:

а) десяток, сотня, тысяча, десяток тысяч и т. д.

б) тысяча, миллион, миллиард и т. д.

Простые единицы составляют первый разряд числа и называются единицами первого разряда.

Десятки — второй разряд и называются единицами второго разряда.

Сотни — третий разряд и называются единицами третьего разряда и т. д.

Единицы — от одной до девятисот девяноста девяти — называются единицами первого класса. Тысячи составляют второй класс и называются единицами второго класса и т. д.

Обобщим основные правила устной нумерации, приняв для простоты речи за основание нумерации число десять.

1. *Отношение единиц двух смежных разрядов, именно высшей единицы к низшей, постоянно* и равно основанию, т. е. десяти.

2. *Отношение единиц двух смежных классов постоянно* и равно в нашей нумерации тысяче.

3. Все числа от единицы до десяти имеют особые названия. Особые названия получает группа — десять десятков, а также все классовые единицы — тысяча, миллион, миллиард и т. д.

4. Числа составляются с помощью сложения и умножения. Например, число семьдесят тысяч триста пятьдесят семь может быть представлено в виде суммы:

$$7 \cdot 10\,000 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7.$$

Итак, цель устной нумерации — название чисел при помощи немногих слов — достигнута при помощи двоякой группировки единиц множества. В современной нумерации отношение единиц двух смежных разрядов равно десяти и двух смежных классов — одной тысяче. Вообще же говоря, эти отношения могли бы быть иными, чем в нашей нумерации.

Письменная нумерация. Запись числа основывается на его составе. Поэтому перед тем, как записать число, его разбивают на классы, а каждый класс — на разряды. Первый, второй и третий разряды первого класса записывают на первом, втором и третьем месте, считая от правой руки к левой. Первый, второй и третий разряды второго класса записывают на четвертом, пятом и шестом месте и т. д. Число пишут, начиная с высших классов. Например, надо записать число, в котором тридцать четыре миллиона, триста тысяч, семьсот двадцать шесть единиц.

Записываем сперва тридцать четыре: 4 на первом месте справа, а 3 на втором. Затем — 300; два нуля написаны, чтобы цифра 3 занимала третье место. Наконец, 725. Получим: 34 300 725.

В этой записи все разряды заняли надлежащие места: 5 единиц — первое место, 2 десятка — второе, 7 сотен — третье, 3 сотни тысяч — шестое и т. д.

Современная письменная нумерация основана на поместном принципе, который можно сформулировать так:

Одна и та же цифра может изображать число единиц любого разряда, потому что ее место зависит от того, единицы какого разряда она изображает. Нуль пишется на месте того разряда, которого недостает в числе; таким образом нуль служит для того, чтобы определить места цифр, стоящих слева от него.

Историческая справка о нумерации. У древних народов были различные основания нумерации. Вавилоняне имели две системы нумерации с основаниями 10 и 60. Некоторую роль играет число 20 в нумерации финикиян и древних французов. Слово дюжина указывает на существование зачатков двенадцатеричной нумерации (12 суставов на четырех пальцах руки). Преобладающее распространение получила у всех народов десятичная нумерация (10 пальцев на руках).

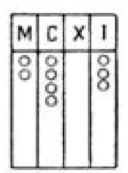
Образование числительных имен зависело от особенностей языка: слова одиннадцать, двенадцать и т. д. образовались в результате соединения слов один на десять, два на десять и т. д. Слова двадцать, тридцать — два десять, три десять и т. д. Двести — два ста. Сорок — сорочёк, древнерусское слово, обозначавшее мешок, в который накладывали определенное число соболиных

шкурок. Существующие объяснения происхождения слова девяносто малоубедительны, поэтому мы их не приводим.

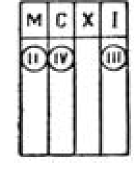
По отношению к письменной нумерации мы будем различать системы нумерации, основанные на поместном принципе, и системы, на этом принципе не основанные.

Поместным принципом пользовались греки и римляне при обозначении числа на особом приборе, называемом абаком. Однако у этих же народов в письменной нумерации поместный принцип не играл никакой роли.

Абак — доска с желобками, в которые клали камешки. На рисунке изображены схемы двух абаков с жетонами; на абаках изображено число 2403.



Черт. 2.



Черт. 3.

Греки изображали разрядные числа с помощью букв:

$$\beta = 2\,000,\ \upsilon = 400,\ \gamma = 3.$$

Числовое значение этих букв не зависело от их места. Число 2403 изображалось в римской нумерации MMCDIII, в греческой — βυγ.

Наши предки — древние славяне — заимствовали нумерацию от греков.

Нумерацией, основанной на поместном принципе, пользовались сумерийцы (3000 до н. э.) и вавилоняне, а позднее—индусы, греки и европейцы. Важное значение в нумерации имеет знак, который должен замещать отсутствующие единицы разряда, т. е. в современной нумерации 0. Уже вавилоняне имели такой знак раньше индусов. Запись, содержащая нуль в виде кружка, относится к 738 году н. э., но другие знаки, играющие роль нуля, были известны гораздо раньше. В Европе до X в. употреблялись исключительно римские цифры. В этом веке проникли в Европу система нумерации и цифры арабов, но вычисления производились на абаке. Изображения чисел на абаке и система нумерации арабов имели в основе один и тот же поместный принцип; поэтому в Европе новая нумерация быстро привилась.

Системы нумерации, не основанные на поместном принципе, были непригодны для письменных вычислений. Поэтому у тех народов, которые ими пользовались, не могли образоваться письменные методы вычисления. Наоборот, нумерация, основанная на поместном принципе, т. е. нумерация, в которой единицы каждого разряда числа изображаются одними и теми же знаками, служит удобной основой для развития письменных действий.

Лаплас (1749–1827), великий математик и астроном, сказал: „Мысль — обозначать числа с помощью десяти знаков, основываясь на абсолютном

и местном значении цифр, так проста, что только по этой причине мы забываем, какого она достойна удивления.

...На сколько было трудно изобретение системы индусов, можно судить по тому, что ее не могли изобрести ни Архимед, ни Аполлоний Пергейский, принадлежавшие к числу величайших умов древности“.

Образование числовых понятий у детей до их поступления в школу. Вопрос об образовании числовых понятий у детей решается двумя теориями. Одна из них может быть названа теорией восприятия групп, другая — теорией счета. Согласно первой теории, *теории восприятия групп*, числовые понятия у детей возникают вследствие многократного созерцания групп предметов, задолго до того времени, как дети начинают сознательно считать. В раннем детстве каждое числовое понятие у детей связано с групповым образом: ребенок понимает, что такое три яблока, три тарелки, три стула, но он не имеет еще отвлеченного, отделенного от предметных представлений понятия о числе три: понятие числа у него еще не отделяется от образа группы предметов, который в этом случае носит название заместителя понятия числа. Заместителем числового понятия у малолетних является образ группы. В дальнейшем, как это будет видно, заместительная функция понятия перейдет от группы предметов к слову или к цифре.

Чтобы возникновение представления о группе предметов было возможно, группа предметов должна быть доступной непосредственному восприятию, т. е. должна быть такой, чтобы ребенок был в состоянии воспринять ее одним взглядом или прикосновением руки и затем мог представить зараз и всю группу в целом и каждый предмет ее в отдельности. Такое восприятие возможно только тогда, когда число предметов группы весьма ограничено. Если предметы расположены подряд, то группа доступна непосредственному восприятию только тогда, когда число предметов в ней не больше 4. Если предметы соединены в какие-либо подгруппы, как, например, очки игральной карты, то вся группа становится более доступной для восприятия.

Детям чаще всего приходится созерцать предметы, расположенные в ряд или без особого порядка. Такая группа доступна непосредственному восприятию, когда предметов не более 4. Поэтому у детей возникают прежде всего понятия о первых четырех числах. Процесс образования этих понятий заканчивается обычно до четырехлетнего возраста, после чего в этом процессе наступает перерыв; и если ребенка не обучают счету, то этот перерыв продолжается довольно долго, до поступления в школу.

Итак, согласно теории непосредственного восприятия, первые числовые понятия возникают на основе многократного созерцания групп, помимо счета: каждое числовое понятие сопровождается образом группы.[1]

Теория счета противоположна теории восприятия групп. Для счета необходимо иметь числовой или натуральный ряд, например, ряд слов, произносимых в постоянной последовательности. Считая предметы какой-либо совокупности, мы сопоставляем их с членами числового ряда. Считая, например, яблоки, мы говорим: „одно" яблоко, и в то же время указываем на первое яблоко, далее говорим „два", в то время как указываем на следующее яблоко, и т. д. Говоря, что на тарелке „семь" яблок, мы этим хотим сказать, что, сопоставляя группу яблок с членами числового ряда, мы остановились на слове „семь".

Таким образом, при счете мы заменяем одно множество другим, хорошо нам известным.

Образование числовых понятий, согласно теории счета, у детей совершается так. Ребенок воспринимает группу предметов не зараз, а переходя последовательно от одного предмета к другому. Научившись произносить слова — один, два, три и т. д., ребенок научается затем относить к каждому предмету данной группы эти слова последовательно одно за другим. Так образуются понятия о числах, как об элементах натурального или числового ряда. Каждое числовое понятие связано с образом того или другого ряда и, вероятнее всего, с образом звуков, следующих друг за другом в определенной последовательности.[2]

Итак, согласно теории непосредственного восприятия, первые числовые понятия у детей возникают помимо счета, только лишь благодаря созерцанию групп. По теории счета числовые понятия образуются в процессе счета, и групповые образы особого значения для возникновения у детей числовых понятий не имеют. По первой теории образы чисел у детей имеют групповой характер, по второй теории — числа представляются в виде членов числового ряда, т. е. в виде последовательного ряда звуков или каких-либо движений.

Которая из этих теорий права? Дети очень рано приобретают способность распознавать отдельные предметы в группе и их удерживать в своем воображении, но не скоро научаются сознательно считать.

Между тем, числовые понятия у них возникают довольно рано. Поэтому

---

[1] Эта теория в Германии находит немало сторонников. Лай говорит: „На первой ступени развития счет является производным от числа, а не наоборот". Руководство к первоначальному обучению арифметике, перев. с немецк., Москва, 1906 г.

[2] Об образовании числовых понятий: Эрн. — Очерки по методике арифметики. Мейман говорит, что числовые представления „развиваются на основе пересчитывания предметов".

вероятнее всего, что у малолетних детей первые числовые понятия образуются согласно с первой теорией.[1]

Когда образовались понятия о первых четырех числах, то наступает на некоторое время перерыв в образовании числовых понятий.

Это происходит потому, что восприятие групп, заключающих более четырех предметов, затруднительно; образование же дальнейших числовых понятий путем счета преждевременно, так как для малолетних счет — более трудный умственный процесс, чем восприятие групп. Перерыв тянется несколько лет, после чего процесс образования числовых понятий продолжается, но уже путем счета.

Для старших детей этот способ образования числовых понятий более экономен, чем первый, так как счет им дается легко, усвоение же групповых образов, когда группа заключает более четырех предметов, утомительно для воображения и обременительно для памяти. Но и в этот второй период детства, когда образуются понятия о числах 5—10, одновременное восприятие группы впечатлений, привычное для раннего детского возраста, в особенности для детей с ярко выраженным зрительным типом памяти, продолжает, вероятно, существовать наряду с сосчитыванием. [2]

Образование понятий о целом числе в школе. Понятия целого числа образуются у учащихся в связи с изучением нумерации и арифметических действий над целыми числами.

В течение *первого года* дети усваивают счет до 10 и цифры, понятие о десятичном составе чисел второго десятка и сотни, счет и запись чисел до 20 и до 100. Устные вычисления укрепляют эти понятия и обогащают память детей знанием состава числа в разнообразной группировке его единиц.

На *втором году* учащиеся изучают образование тысячи, состав чисел первой тысячи, счет до 1000. Записывая трехзначные числа в пределах тысячи, учащиеся получают первые сведения о поместном принципе (которые в следующих годах будут расширяться и оформляться).

На *третьем году* усваиваются: понятия о тысяче, десятке тысяч и сотне тысяч, как о счетных единицах; понятие о составе чисел, названия и последовательность чисел до миллиона; письменная нумерация и понятие поместного ее принципа.

На *четвертом году* изучаются: образование миллиона и миллиарда; понятие о соотношении между разрядными и классовыми единицами; состав чисел из разрядов и классов, название и последовательность их, письменная нумерация чисел любой величины.

---

[1] К. Ф. Лебединцев говорит в книге „Развитие числовых представлений у ребенка в раннем детстве“: „Понятие о первых числах, до 5 включительно, ребенок приобретает без посредства сосчитывания“.

[2] К. Ф. Лебединцев. — Введение в современную методику математики, стр. 60—61.

РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЙ ОБ ОСНОВНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЯХ И ОБ ИХ ЗАКОНАХ.

Сложение. Сложить несколько целых чисел значит найти число, в котором столько единиц, сколько их во всех данных числах.

Первоначальное понятие присчитывания по единице возникает из числового ряда. Чтобы к 5 прибавить 3, надо к 5 прибавить 1 получится 6, так как за 5 следует 6; затем к 6 прибавить еще 1 и т. д.

Когда к данному числу требуется прибавить значительное число единиц, например 4, 5 и больше, то эти единицы соединяют в группы, которые и прибавляют одну за другой к данному числу (стр. 10).

Таким образом первоначальный способ сложения опирается на числовой ряд. Затем, по мере возрастания чисел, этот способ уступает место другому: единицы слагаемых чисел соединяются в группы, которые затем складываются. Сложение двузначных и многозначных чисел, в которых единицы уже сгруппированы, приводится к сложению соответственных разрядов чисел, т. е. к сложению однозначных чисел. Сложим два числа — 43 и 25, получим 68. Спрашивается, какие преобразования суммы 43 + 25 надо совершить, чтобы прийти к числу 68? Сделаем эти преобразования:

$$43 + 25 = (40 + 3) + (20 + 5) =$$
$$= 40 + 3 + 20 + 5 =$$
$$= 40 + 20 + 3 + 5 = (40 + 20) + (3 + 5) = 68.$$

В этих преобразованиях можно усмотреть следующие законы, которые мы здесь изложим.

Переместительный закон сложения: при перестановке слагаемых, сумма не изменяется.

В нашем примере мы воспользовались этим законом, переходя от второй строчки к третьей.

Сочетательный закон сложения: вместо того чтобы прибавить к числу сумму чисел, можно прибавить эти числа одно за другим.

В примере мы пользовались этим законом, переходя от первой строки ко второй. Вот еще пример: 37 + (63 + 50) = 37 + 63 + 50 = 150.

На основании этих законов сложение многозначных чисел приводится к сложению их разрядных чисел. Поэтому для сложения многозначных чисел необходимо: иметь представление о законах сложения, знать нумерацию и помнить таблицу сложения, которая заключает все суммы однозначных чисел, взятых попарно.

В школе первой ступени, благодаря устным вычислениям, накапливаются конкретные представления о законах сложения. Сами же законы в отвлечен-

ной форме, т. е. в виде правил, выраженных словами или буквенными тождествами, усваиваются позже на пятом или шестом годах обучения.

Умножение. Из сложения возникает понятие умножения:

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$$
$$3 \cdot 5 = 15.$$

Умножить одно число на другое, значит взять первое число, как слагаемое, столько раз, сколько единиц во втором числе.

При вычислении произведения выбирают приемы, которые сокращали бы труд многократного сложения. Пример:

$$8 \cdot 7 = 8 \cdot (5 + 2) = 8 \cdot 5 + 8 \cdot 2 = 56$$
$$4 \cdot 6 = 6 \cdot 4$$
$$7 \cdot 30 = 7 \cdot (3 \cdot 10) = 7 \cdot 3 \cdot 10 = 210.$$

Эти приемы распространяются и на числа многозначные.

Примеры:

$$\begin{array}{r} \underline{3456 \times 7} \\ 42 \\ 350 \\ 2800 \\ \underline{21000} \\ 24192 \end{array}$$

Короче:

$$\begin{array}{r} 3456 \\ \underline{\times 7} \\ 24192 \end{array}$$

$247 \cdot 30 = 247 \cdot 3 \cdot 10 = 7410.$

Короче:

$$\begin{array}{r} 247 \\ \underline{\times 30} \\ 7410 \end{array}$$

Итак, первоначальный прием умножения представляет собой повторное сложение. По мере возрастания множителя, этот прием уступает место другим приемам, сокращающим работу умножения. Умножение двузначных и многозначных чисел приводится к умножению каждого разряда множимого на каждый разряд множителя, т. е. к умножению однозначных чисел. Перемножим числа 6 и 28:

$$6 \cdot 28 = 6 \cdot (20 + 8) =$$
$$= 6 \cdot 20 + 6 \cdot 8 =$$
$$= (6 \cdot 2) \cdot 10 + 8 \cdot 6 = 120 + 48 = 168.$$

В преобразованиях, сделанных здесь, усматриваются законы:

Распределительный закон умножения: вместо того, чтобы умножить сумму чисел на данное число, можно каждое из этих чисел умножить на это число порознь и произведения сложить.

При решении примера $6 \cdot 28$ этот закон послужил для перехода от первой строки ко второй: $6 \cdot (20 + 8) = 6 \cdot 20 + 6 \cdot 8$.

П е р е м е с т и т е л ь н ы й   з а к о н умножения: при перестановке сомножителей произведение не изменяется.

При решении примера $6 \cdot 28$ мы переставили сомножителей произведения $6 \cdot 8$.

С о ч е т а т е л ь н ы й   з а к о н умножения: вместо того, чтобы умножить число на произведение двух чисел, можно это число умножить последовательно сперва на первый сомножитель, затем полученное произведение — на второй сомножитель.

В том же примере в согласии с этим законом умножено 6 на 20, — а именно: $6 \cdot 20 = (6 \cdot 2) \cdot 10 = 120$.

На основании этих законов умножение чисел приводится к перемножению их разрядных чисел. Поэтому для умножения целых чисел необходимо иметь представление о законах умножения, знать нумерацию и помнить таблицу умножения, которая заключает все произведения однозначных чисел, взятых попарно.

Вычитание. Решим задачу:

Сумма двух чисел равна 12, одно из них 5. Требуется найти другое.

Обозначив искомое число через x, запишем требование задачи: $5 + x = 12$ или $x + 5 = 12$.

Действие, при помощи которого отыскивается слагаемое x по данным — сумме и другому слагаемому, носит название вычитания и записывается: $12 - 5 = 7$.

Вычесть из одного числа другое значит, найти одно из слагаемых, когда даны сумма и другое слагаемое.

Если сложить 5 и 7, то получится 12. Наоборот, если вычесть из суммы 12 слагаемое 5, то получится слагаемое 7. Поэтому вычитание называют действием, обратным сложению.

Первоначальное вычитание представляет собой отсчитывание по единице. Далее отсчитываемые единицы дети соединяют в группы и отнимают эти группы. Например:

$$7 - 4 = 7 - 1 - 1 - 1 - 1 = 7 - 2 - 2.$$

Скоро они подмечают соотношение вычитания со сложением и нередко пользуются при вычитании сложением. Например:

$$13 - 8 = 5, \text{ так как } 8 + 5 = 13.$$

Переходя к большим числам, примитивное отсчитывание по единице заменяют поразрядным вычитанием:

$$72 - 35 = (60 + 12) - (30 + 5) = (60 - 30) + (12 - 5) = 37.$$

На этом приеме основывается и механизм вычитания многозначных чисел.

Вычитая в последнем примере 35 из 72, мы получили остаток 37.

Выпишем преобразования, которые надо совершить над разностью 72 − 35, чтобы прийти к остатку 37.

$$72 - 35 = (60 + 12) - (30 + 5) = 60 + 12 - 30 - 5 =$$
$$= (60 - 30) + (12 - 5) = 37.$$

В этом преобразовании можно усмотреть следующее свойство вычитания:

Вместо того, чтобы вычесть сумму чисел, можно вычесть эти числа одно за другим.

Этим свойством мы воспользовались при решении примера, переходя от первой строчки ко второй:

$$72 - (30 + 5) = 72 - 30 - 5.$$

Деление. Решим задачу:

Произведение двух чисел равно 40, одно из них 8. Найти другое число.

Обозначив искомое число через x, запишем требование задачи:

$$8 \cdot x = 40 \text{ или } x \cdot 8 = 40.$$

Действие, посредством которого из этих уравнений находят неизвестное x, называется делением и записывается:

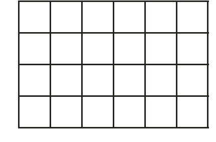
$$40 : 8 = 5.$$

Неизвестное число равно 5, потому что $8 \cdot 5 = 40$, или $5 \cdot 8 = 40$.

Разделить одно число на другое значит, по данному произведению и одному из сомножителей найти другой сомножитель.

Если перемножить числа 8 и 5, то получится 40. Наоборот, если разделить произведение 40 на один из сомножителей — 8, то получится другой сомножитель 5. Поэтому деление называют действием, обратным умножению.

Рассмотрим конкретные задачи, в которых деление находит применение в случае, когда делимое, делитель и частное — целые числа. Пусть требуется сосчитать, сколько изображено квадратов на прилагаемом чертеже. Для этого надо произвести умножение: 6 кв. × 4 = 24 кв.



Черт. 4.

Составим задачи, обратные этой задаче. Таких задач две:

Во сколько рядов можно расположить 24 квадрата, если в каждый ряд поместить по 6 квадратов?

По сколько квадратов надо поместить в ряд, чтобы 24 квадрата расположить в 4 ряда, поровну в каждом ряду?

В первой задаче дается произведение 24 кв. и множимое 6 кв., ищется же множитель. Во второй задаче дается произведение 24 кв. и множитель 4, ищется множимое.

Таким образом в обеих задачах даются произведение и один из сомножителей, а ищется другой сомножитель; поэтому обе

задачи решаются одним и тем же действием, которое называется делением.

В первой задаче надо „24 разделить на шесть", т. е. найти число, от умножения которого на 6 получится 24:

$$24 : 6 = 4, \text{ так как } 4 \cdot 6 = 24.$$

Во второй задаче надо „24 разделить на четыре", т. е. найти число, от умножения которого на 4 получится 24:

$$24 : 4 = 6, \text{ так как } 6 \cdot 4 = 24.$$

Обе эти задачи решаются делением, но конкретный смысл деления в этих задачах неодинаков.

В первой задаче надо узнать, сколько раз 6 кв. содержится в 24 кв., или 24 кв. разделить по 6 кв.[1] или еще иначе — узнать, во сколько раз 24 кв. больше 6 кв.

Во второй задаче надо 24 кв. разделить на 4 равные части, или узнать одну четверть числа 24 кв., или уменьшить 24 кв. в 4 раза.[2]

Отвлеченное и обобщенное понятие деления не может образоваться у учащихся в начале обучения арифметике, когда арифметические действия изучаются на предметах, и понятия о них имеют еще образный характер. В этом периоде обучения оба вида деления в сознании детей совершенно обособлены одно от другого. Процесс обобщения этих понятий совершается весьма медленно и более или менее оформляется только на втором году. Средства, объединяющие два вида деления, следующие:

а) Слово „разделить" и знак деления.

б) Многочисленные, чаще всего полусознательные сопоставления решений примеров и задач, относящихся к делению; например,

$$36\ м : 4 = 9\ м$$
$$36\ м : 4\ м = 9.$$

в) Умножение, как главный вычислительный прием обеих задач на деление.

---

[1] Образное и поэтому весьма удобное для первых ступеней обучения выражение для деления по содержанию — „разделить по" мы встречаем в книге „Методика арифметики" — Беллюстина. Им пользуется также Д. Л. Волковский (см. Арифметика в начальной школе, под ред. А. С. Пчелко).

[2] Многие ученые в научных курсах арифметики различают два вида деления. Так H. Schubert в „Encyclopedic des Sciences mathematiques", tome I, volume I, стр. 43 говорит, что слово „деление" имеет два весьма различных смысла; на стр. 39 называет множимое числом „пассивным", а множитель „активным".

К. Фербер в книге: „Арифметика", стр. 27 также находит нужным различать два случая деления.

Так, деля 36 *м* на 4 равные части, учащийся подбирает число 9, от умножения которого на 4 получится 36. Деля 36 *м* по 4 *м*, ученик снова подыскивает число 9, от умножения которого на 4, получится 36.

Если объединение двух видов деления совершается у детей медленно, то представление о делении, как о действии обратном умножению возникает у них очень рано. По существу, уже в первых примерах и задачах на деление дети выполняют это действие при помощи сложения или умножения, набирая данное число предметов равными группами. Например:

Надо связать 12 морковок в пучки, по 4 морковки в пучке. Сколько выйдет пучков?

Ученик про себя будет набирать 12 морковок по 4 морковки: 4 да 4 да еще 4, получится 12, а потому получится 3 пучка.

При изучении таблицы умножения и деления, дети уже пользуются взаимосвязью этих действий. Вычислив $9 \cdot 8 = 72$, они предвидят необходимость результатов:

$$72 : 8 = 9 \text{ и } 72 : 9 = 8.$$

Изучая на втором году таблицу деления и внетабличное деление в пределе сотни и тысячи, учащиеся очень часто пользуются и другими приемами деления. Так, 75 делят на 5, разбивая делимое на слагаемые:

$$75 : 5 = 50 : 5 + 25 : 5.$$

Нередко они прибегают к последовательному делению на сомножителей делителя:

$$64 : 4 = 64 : 2 : 2$$
$$720 : 80 = 720 : 10 : 8.$$

Из всех этих приемов вырабатываются понятия о свойствах деления, которые составляют основу деления многозначных чисел.

Решим пример 640 : 20, произведя подробную запись.

$$640 : 20 =$$
$$= (640 : 10) : 2 = 64 : 2 = (60 + 4) : 2 =$$
$$= 60 : 2 + 4 : 2 = 30 + 2 = 32.$$

Первое свойство деления: вместо того, чтобы разделить сумму чисел на данное число, можно разделить каждое слагаемое и полученные частные сложить.

Этим свойством мы пользовались при решении примера 640 : 20, переходя от второй строки к третьей: $(60 + 4) : 2 = 60 : 2 + 4 : 2$.

Второе свойство деления: вместо того, чтобы разделить число на произведение двух чисел, можно это число разделить на первый сомножитель, затем полученное частное на второй сомножитель.

В вышеприведенном примере, мы совершили деление 640 : 20 = (640 : 10) : 2 в согласии с этим свойством.

Третье свойство деления: вместо того, чтобы разделить произведение двух чисел на третье число, можно разделить на это число один из сомножителей.

Например, 60 : 2 = (6 · 10) : 2 = (6 : 2) · 10 = 30.

Эти три свойства деления и его определение служат основанием для устного и письменного деления целых чисел.

Значение основных арифметических понятий. Основу четырех действий составляют определения сложения, вычитания, умножения и деления и законы этих действий, изложенные выше. Любое из этих действий во всех вычислительных его подробностях совершается на основании определений его и в согласии с этими законами. Учащиеся школы первой ступени, не зная самих законов, знают конкретные их приложения в виде разнообразных вычислительных приемов. Учитель же должен иметь понятие об этих законах и об их роли в арифметических действиях не для того, чтобы говорить о них детям, но для того, чтобы при обучении детей арифметике обращать возможно большее внимание на отчетливость и разнообразие вычислительных приемов, которые представляют собой конкретную основу понятий о законах арифметических действий. Ученик без основных арифметических понятий не может сознательно производить вычислений, а учитель без элементарных сведений о законах вычислений не может сознательно направлять обучение арифметике.

МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ АРИФМЕТИКЕ.

ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДОВ ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ.

Развитие мышления. Познавание, как и другие душевные функции детей, с успехом можно изучать только в его развитии. Вот почему образование каждого арифметического понятия необходимо рассматривать, как процесс, имеющий большую или меньшую продолжительность и разные ступени обобщения и отвлечения.

Мышление детей, вступающих в начальную школу, конкретно; дети не могут в своих суждениях оторваться от предметов и от предметных образов. В школе, главным образом под влиянием изучения арифметики, у них совершается с медленной, но неуклонной постепенностью рост обобщенного и отвлеченного мышления и способности к умозаключениям.

Когда учащийся, решая несколько различных по содержанию задач на сложение, правильно называет это действие, то из этого можно заключить, что

в его сознании созрело обобщение конкретных, единичных случаев сложения в одном общем понятии сложения.

Когда учащийся первого класса, умножая 2 на 7, опирается на усвоенные его памятью предложения $2 \times 5 = 10$ и $2 \times 2 = 4$, то он и в данном случае достиг известной ступени отвлечения.

Рассуждение детей в возрасте 7—11 лет не чисто дедуктивно и не вполне индуктивно: оно идет *от единичного к единичному*. Психолог Штерн называет такое мышление *трансдуктивным*. Например, если учитель показал ученику, как складываются числа 8 и 5 или 7 и 4, то ученик сумеет тем же способом, т. е. способом дополнения первого числа до десятка, сложить 7 и 5, пользуясь рассуждением, идущим от единичного к единичному, или трансдукцией. Как видим, трансдукция есть в значительной мере рассуждение по аналогии.[1]

Но трансдуктивное мышление мало-по-малу уступает место индукции и дедукции. Так, на третьем году учащиеся, умножая целые числа на 20, 30... и на 200, 300..., подмечают единообразие приема, которым затем пользуются при умножении на круглые десятки и сотни. В том же третьем году они делают вывод правила площади прямоугольника и этим правилом пользуются при измерении площадей не только прямоугольников, но и более сложных фигур с прямыми углами.

В начальном курсе арифметики необходимо различать обобщения и отвлечения по времени их роста. Например, понятие о переместительном свойстве сложения образуется у детей очень рано, понятие же о переместительном свойстве умножения появляется много позже.

Выбор действия сложения при решении задач не затрудняет детей даже в пределах первого десятка. Зато понятие о делении как общее понятие, охватывающее два вида конкретных делений, созревает весьма медленно.

Тоже можно сказать и о понятиях арифметических действий, которые развиваются весьма постепенно и медленно. На втором году обучения эти понятия достигают значительной зрелости. На основе их на третьем году создаются уже механизмы письменных действий, а на четвертом году вырабатываются определения и ряд правил.

Обобщения и умозаключения совершаются с большим или меньшим участием речи (стр. 7). В самом начале курса арифметики процессы мышления выражаются больше в действии, чем в словах: ученик умеет верно сделать, но выразить словами то, что он сделал, еще не может. В объяснениях он ограничивается отдельными словами или короткими отрывочными фразами. Медленно овладевает он речью. Зная это, преподаватель должен вооружиться терпеливой и осторожной настойчивостью в выработке арифметической

---

[1] Пиаже. — Речь и мышление ребенка, глава IV.

фразеологии и не предъявлять к ребенку непосильных требований, не раздражаться и не терять терпения перед его бессилием точно и полно выразить свою мысль словами. Развитию арифметической речи будет способствовать: требование, так называемых, полных ответов и объяснение решения сложных задач и вычислительных приемов. Выводы, которые учащиеся делают в первые три года, еще очень кратки, неполны и необщи. На четвертом году речь ученика становится богаче, от чего появляется возможность формулировать определения и правила. В это время мышление учащегося достигает значительной степени обобщения и отвлечения; становятся возможными несложные формальные рассуждения.

Из всего сказанного сделаем выводы:

а) На урок надо смотреть, как на ступень роста арифметического мышления. Никакое понятие не может быть на одном уроке до конца разъяснено и усвоено.

б) Необходимо изучать различные способы образования арифметического понятия, чтобы затем выбрать из них тот, который наилучше согласуется с законами развития мышления детей.

в) Для успеха преподавания арифметики необходимо всегда продумать, хотя бы в общих чертах, весь процесс развития понятия — от его восприятия до полного усвоения и применения.

В развитии понятий будем различать следующие элементы:

а) Восприятие и понимание. Внимание, интерес и самодеятельность.

б) Запоминание.

в) Применение и творчество.[1]

Восприятие и понимание. Восприятие и понимание на уроках арифметики сводятся главным образом к уяснению причинных связей нового понятия с другими более элементарными и хорошо известными ученику понятиями.

Например, понятие $4 \cdot 3$ он связывает с понятием $4 + 4 + 4$. Умножение $8 \cdot 7$ ученик сводит к более элементарным действиям: $8 \cdot 5 + 8 \cdot 2$.

Пониманию предшествует восприятие. Так, $8 \cdot 7$ ученик воспринимает, как сумму $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8$, при этом в наглядной форме, откуда затем получается прием $8 \cdot 5 + 8 \cdot 2$. Причинные связи могут быть установлены наглядно или с помощью отвлеченных рассуждений.

От степени развития ученика зависит, какой из этих путей для понимания является наиболее подходящим.

[1] О. Вильман. — Дидактика, т. II, стр. 278—287.

Для целей понимания удобно материал урока разлагать на единицы, не очень крупные, чтобы они были легко обозримы, и не очень мелкие, чтобы не утрачивался интерес к уроку. Эти единицы должны быть между собой связаны. Старинные дидакты говорили: „тот хорошо учит, кто хорошо расчленяет". Римский поэт Гораций называл хорошее построение речи „ясным порядком". Ясный порядок урока достигается целесообразным расчленением и связанностью частей. Например, уроки сложения чисел в пределах сотни (с переходом через десяток) могут иметь следующее расчленение:

1. Одно из слагаемых — однозначное число:

   а) сумма единиц составляет десяток;
   б) сумма единиц больше десятка.

2. Оба слагаемые — двузначные числа:

   а) сумма единиц составляет десяток;
   б) сумма единиц больше десятка, оба слагаемые равны;
   в) сумма единиц больше десятка, оба слагаемые неравны.

Каждый случай прорабатывается сперва на предметах, затем на отвлеченных примерах и задачах.

Понимание облегчается выделением главного, существенного. Наоборот, оно затрудняется, когда главные и второстепенные мысли развиты с одинаковой подробностью, без контрастов. Например, при построении уроков сложения многозначных чисел, главными понятиями служат:

а) Сложение чисел по их разрядам.

б) Случаи, когда сумма разрядных чисел меньше, равна, больше десяти.

Для достижения понимания важно не только *расчленение*, но и *объединение*. Поэтому в конце урока необходимо подвести итог в виде нескольких обобщений, относящихся к последовательном этапам урока.

Самым верным средством для понимания надо признать последовательный и в то же время доступный для учащихся ход мыслей, выраженных простым ясным языком.

Из всего сказанного очевидно, что каждый урок арифметики должен представлять органическое целое, т. е. совокупность связанных между собой понятий. Ряд уроков, объединенных одной темой, должен быть построен так, чтобы одно понятие постепенно рождалось из других, т. е. уроки, относящиеся к одной теме, должны быть между собой *генетически* связаны, составлять *генетический* ряд.[1]

---

[1] О. Вильман. — Дидактика, т. 2, § 78, 1 и § 80, 3.

Генетический — основанный на происхождении, образовании, рождении. Генезис (греч.) — рождение, происхождение.

Внимание, интерес и самодеятельность. Понимание, интерес и внимание — постоянные и неразлучные спутники в процессе познания. Для достижения понимания необходимо овладеть вниманием учащегося, а для этого надо пробудить у него интерес к предмету. И обратно — успех понимания возбуждает интерес, а вместе с ним и внимание.

Психология различает внимание непроизвольное или пассивное и произвольное или активное.

В школьном возрасте учащиеся должны обладать в большей или меньшей степени произвольным вниманием, и чем старше они, тем активнее может быть их внимание.

Главными средствами, возбуждающими интерес и внимание ученика, служат *успех понимания* и *активность*. Последовательный и вместе с тем доступный для учащегося ход мыслей не только благоприятен для понимания, но и внушает интерес и поднимает активность.

Особенно важно такое построение урока и такая постановка вопросов, которые внушали бы учащимся *предвидение* или *ожидание* дальнейшего хода рассуждений. От этого ожидания и зависит появление и устойчивость внимания. Например, подходя впервые к письменному делению многозначного числа на однозначное, необходимо решить несколько примеров устного деления, пользуясь приемом разложения делимого на части. При надлежащей постановке вопросов этим можно вызвать ожидание аналогичного хода рассуждений и в письменном делении.

Другим возбудителем внимания и интереса служит самодеятельность, которая в курсе арифметики выражается главным образом в решении задач и примеров. Поэтому, чтобы сделать интерес учащихся активным, арифметические понятия вырабатывают на задачах и примерах; при решении примеров заставляют учащихся перебирать разные приемы и сравнивать их между собою; предлагают такие задачи, которые требуют измерения, черчения, вырезывания. Словом, организуют уроки арифметики так, чтобы учащиеся как можно чаще были заняты активной работой.

Запоминание. Запоминание весьма важный акт познания, и поэтому преподаватель должен в своей практике всегда задаваться вопросами: какими средствами можно достичь твердого запоминания и легкого припоминания правил и логических процессов; какими мерами можно облегчить запоминание для тех учащихся, которые обладают слабой памятью.

Из условий, благоприятных для запоминания, назовем наиболее существенные:

а) Запоминается быстро и твердо то, что связано причинными и ассоциативными связями с тем, что хорошо известно.

Арифметическое понятие или правило усваивается хорошо, если оно осмыслено, осознано, понятно. Все, что благоприятно для понимания, содействует и запоминанию.

б) Прочное запоминание достигается повторением. Вспомним изречение древности: „повторение — мать учения“ или „ни одного дня — без линейки“, т. е. без письма.

Однако повторение не должно состоять в механическом многократном воспроизведении. *Повторять нужно рассуждая*, т. е. воспроизводить новое в его связях с прошлым, хорошо известным, с привычными образами, с привычными схемами рассуждения. Поводом для такого рассуждающего повторения служат в арифметике целесообразно подобранные упражнения. Весьма существенным средством для усвоения служит повторное возвращение к одному и тому же через более или менее продолжительные промежутки времени. Повод к таким повторным возвращениям можно искать, во-первых, в упражнениях и, во-вторых, в новых понятиях, правилах, вычислительных приемах, поскольку они обосновываются пройденным. Например, проходя письменное умножение на однозначное число, мы обязаны основательно повторить устные приемы умножения на однозначное число.

в) Легче всего запоминается то, что доставляет радость. Встарину говорили: „любовь учит мастерству“. Надо следовать таким методам обучения, которые повышали бы интерес к учению.

г) Чтобы вспомнить многое, надо хорошо помнить *немногое*, *но главное*. Для этого всегда следует в рассуждениях выделять главную мысль, чтобы учащиеся прежде всего и тверже всего ее сохраняли в своей памяти. Тогда все частности, связанные с нею, будут легче восстановляться в памяти.

Применение и творчество. Последнее звено в познании составляют применение и творчество. Обучение было бы несовершенным, односторонним, если бы оно было ограничено функциями восприятия, понимания и запоминания, без применения, без выявления активно-творческих начал учащегося. Природа ребенка не только рецептивна, т. е. заключает в себе потребности восприятия, но и продуктивна, т. е. обладает творческими возможностями. Школа должна развивать те и другие силы ребенка. „Ребенок — отец взрослого“, в будущем активный член социалистического общества. Школа должна воспитывать в нем наклонности и навыки, необходимые для этой его роли.

Арифметическая теория находит свое применение в задачах, которые могут быть более или менее близки к жизни. Роль всякой арифметической задачи двусторонняя: одной стороной своей задача обращена к теории и служит для укрепления и обогащения теоретических знаний, для пробуждения творческих способностей; другой стороной задача обращена к жизни, к природе, быту, строительству и служит для их познания (стр. 8).

МЕТОДЫ, КАК СРЕДСТВО ПОЗНАВАНИЯ.

Метод. Метод есть система действий, направленных к определенной цели и основанных на определенном принципе. Имея в виду цель — обучение детей арифметике, мы можем задать себе вопросы:

В каком направлении необходимо вести учебно-познавательный процесс — от частных суждений к общему или наоборот?

Какая форма обучения явится наиболее подходящей для данной цели — беседа, изложение, решение целесообразно-подобранных задач, чтение книги?

Отвечая на эти вопросы, мы будем различать методы обучения арифметике, как пути познавательного процесса и как формы обучения. К первым принадлежат — индуктивный и дедуктивный, аналитический и синтетический методы (стр. 306 и 308). Ко вторым — методы вопросо-ответный, лекционный (для начальной школы — рассказ), лабораторный, работа по книге.

Индуктивный метод. Индукция есть рассуждение, восходящее от частных суждений к более общему. Метод обучения, основанный на индукции, может быть назван *индуктивным*.

Индуктивный метод в курсе арифметики по существу есть метод обучения арифметике на задачах, если понимать задачу в широком смысле, как всякий пример, всякое упражнение, служащее для выработки какого либо понятия. Учитель, ведущий урок этим методом, подбирает ряд простых задач, которые решаются в классе с подробными объяснениями. Решая одну задачу за другой, учащиеся начинают подмечать общее их свойство, закономерность в решении, „правило“, которым они пользуются при решении последующих задач. Правила иногда „выводятся“ в виде обобщений, выраженных словами (индукция). Нередко подмеченные в рассуждениях закономерности остаются в скрытом виде и только лишь поясняются на частных примерах (стр. 7 и 27). В первые два года обучения арифметические обобщения в явном виде делаются редко или бывают весьма кратки, на третьем и в особенности на четвертом году, они встречаются чаще.

Воспользуемся умножением на круглые десятки для пояснения индуктивного метода обучения арифметике. Начнем с задачи:

Пионеры, устроив вечер, продали 60 билетов по 25 коп. за билет. Какую сумму они собрали?

Надо 25 коп. умножить на 60. Но 60 — это 6 десятков. Поэтому узнаем, сколько выручили за 10 билетов. Для этого умножим 25 коп. на 10.

$$25 \text{ коп.} \times 10 = 250 \text{ коп.}$$

Затем узнаем, сколько копеек они выручили за 6 десятков билетов. Для этого умножим 250 коп. на 6.

$$250 \text{ коп.} \times 6 = 1500 \text{ коп.} = 15 \text{ руб.}$$

Решим эту же задачу иначе. Представим себе, что 60 билетов разложили в 10 рядов по 6 билетов в каждом. Узнаем, сколько стоят билеты в одном ряду:

$$25 \text{ коп.} \times 6 = 150 \text{ коп.}$$

Узнаем, сколько стоят билеты в 10 рядах:

$$150 \text{ коп.} \times 10 = 1500 \text{ коп.} = 15 \text{ руб.}$$

Подобным же способом решаем примеры:

6 · 20	7 · 30	8 · 40	12 · 50	20 · 20
14 · 20	25 · 30	15 · 40	15 · 50	20 · 30
25 · 20	80 · 30	25 · 40	20 · 50	20 · 40

Рассуждаем так. По 6 взять 20 раз. Представим себе, что мы по 6 записали 20 раз так: в ряду 2 раза по 6, и таких рядов —10,

Узнаем, сколько единиц в ряду: 6 · 2 = 12.

Затем узнаем, сколько единиц в 10 рядах: 12 · 10 = 120. При выводе правила запишем решения примеров так:

$$6 \cdot 20 = 6 \cdot 2 \cdot 10 = 120$$
$$7 \cdot 30 = 7 \cdot 3 \cdot 10 = 210$$
$$8 \cdot 40 = 8 \cdot 4 \cdot 10 = 320$$
$$12 \cdot 50 = 12 \cdot 5 \cdot 10 = 600$$

Учитель. — Сколько раз мы взяли по 6? по 7? по 8? по 12?

20, 30, 40, 50 — круглые десятки. Поэтому можем сказать, что мы умножали все числа на круглые десятки. Сколько в 20 десятков?

Ученик. — 2 десятка.

Учт. — На сколько мы умножили 6?

Учк. — Мы умножили 6 на 2.

Учт. — В 20 заключается 2 десятка, и мы умножили 6 на 2. В 30 — 3 десятка, мы умножили 7 на 3 и т. д.

2, 3, 4, 5 — числа десятков. На что умножили мы сперва 6, 7, 8, 12?

Учк. — На числа десятков.

Учт. — Что сделали мы затем?

Учк. — Полученные числа мы умножили на 10.

Учт. — Как же умножить число на круглые десятки?

Учк. — Надо умножить его сначала на число десятков, а затем то, что получится, — на 10.

Решение примеров служило нам основанием для вывода правила, для обобщения. Однако сами примеры мы решали, исходя из общих суждений. Поэтому индуктивное рассуждение сочетается здесь с дедуктивным.

Дедуктивный метод. Дедукция есть рассуждение, нисходящее от общих суждений к частным. Метод обучения, основанный на дедукции, может быть назван дедуктивным.

Дедуктивные доказательства требуют значительной умственной зрелости и находят применение значительно позже, в курсе математики школы второй ступени. Однако дедуктивные суждения возникают уже в школе первой ступени (стр. 7). Если бы начальный курс арифметики был чужд дедукции, он не мог бы служить подготовительной ступенью к следующему дедуктивному

курсу математики. Первичные понятия в начальном курсе арифметики вырабатываются индуктивным методом. Затем они становятся основанием для восприятия последующих более сложных понятий, когда *индуктивные суждения начинают уже сочетаться с дедуктивными*. Так, например, когда учащийся, умножая 586 на 34, берет 586 сначала 30 раз, затем 4 раза и складывает полученные произведения, он исходит из общего ему известного, хотя и невысказанного понятия, которое на 6 году обучения будет выражено в виде буквенного тождества $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Дедуктивный характер мышления обнаруживается каждый раз, когда ученик, решая пример, в своих рассуждениях исходит из общих ранее усвоенных суждений.

Усвоение понятий и правил. В начальном обучении арифметике понятия и правила вырабатываются на задачах и примерах, т. е. индуктивным путем. Возникает вопрос, много ли задач и примеров надо решить для выработки понятия, для оформления его в виде правила и для усвоения. Обычно учащиеся работают над теорией очень мало, и работа сводится к заучиванию. Учитель дает одну-две задачи или один-два примера и, пользуясь решением их, „объясняет“ правило. Учащиеся слушают, в лучшем случае принимают участие в выводе. Когда же преподаватель убедился, что его объяснения и само правило „поняты“, он предлагает повторить правило и затем его выучить. После этого наступает длинный период, в котором учащиеся решают задачи и примеры, применяя правило автоматически.

Какой же получается результат? Ученик, перерешавший множество задач, запоминает правило механически. Пособия, которые были показаны для пояснения правила, и рассуждения, которые были сделаны когда-то для вывода его, представляли короткий эпизод и давным давно улетучились из памяти. От них в сознании осталась фраза, в роде — «длину умножить на ширину“, смысл которой не вполне даже ясен ученику: то ли она относится к прямоугольнику, то ли ко всякой другой фигуре. Так проходит перед учеником одно правило за другим, каждое правило берется как бы штурмом: вывел правило, решил сотню задач; вывел еще формулу, решил еще полсотни примеров. Правила заучиваются быстро, автоматически, а рассуждения, т. е. то, что составляет существенное в теории, как вещи ненужные для решения задач, выбрасываются, выветриваются. Арифметика превращается в собрание рецептов, нужных, полезных для решения задач. Эти рецепты были когда-то обоснованы, разъяснены; но обоснования их забыты. А скоро эта же участь постигает и сами правила, которые, будучи лишены логической или образной опоры, в свою очередь, начинают забываться или искажаться, не вызывая у учащихся никакой логической реакции. Арифметика делается механизирующей, вместо того, чтобы быть рассуждающей. Как бы ни был элементарен

курс арифметики, он все же должен иметь теорию, воспитывающую мышление на простом, конкретном, жизненном материале.

Как же сделать арифметику рассуждающей?

Раньше, чем ответить на этот вопрос, обратимся к примеру умножения на круглые десятки, о которых шла речь выше (стр. 32). Изучение этого вопроса начнем с каких либо жизненных задач. Решая их, будем иллюстрировать умножение на круглые десятки рядами предметов или чисел, как это сделано выше. Рассуждения будут опираться на эти ряды, изображенные на доске и в тетрадях; иными словами, опорой рассуждений будет служить опыт.

Решим таким образом несколько примеров и задач, опираясь в своих рассуждениях на опыт. В это время образ рядов чисел успеет прочно запечатлеться в памяти, и поэтому дети, решая следующую серию задач, будут производить те же рассуждения, уже не обращаясь к опыту, но имея в своей памяти образ.

Рассуждения вследствие многократного повторения будут твердо усвоены. Дети успеют подметить закономерность в вычислениях и будут ею пользоваться. В этот момент выведем правило, если это нужно, и следующие задачи и примеры уже будем решать по правилу.

Таким образом, при выработке арифметического понятия или правила можно избрать один из двух путей. Или вывести на одном-двух примерах правило и затем решить в течение ряда уроков множество примеров, пользуясь этим правилом. Или решить ряд примеров и задач, не пользуясь правилом и производя при каждом решении все рассуждения заново; к правилу же перейти только после того, как все эти рассуждения станут прочным достоянием памяти. Второй путь имеет большие преимущества. *Временная задержка* правила вынуждает детей некоторое время пользоваться повторными рассуждениями, вследствие чего они приучаются рассуждать и хорошо усваивают логические процессы, столь необходимые для твердого усвоения правил.

При исследовании запоминания (стр. 31) было сказано, что прочное запоминание достигается повторением. Но повторение не должно быть механическим, повторять надо рассуждая. Запоминаются твердо правила, связанные с образами и логическими схемами, которые твердо усвоены детьми, стали привычными. Задерживая временно вывод правила и заставляя учащихся получать ответ помимо правила, путем рассуждений, опирающихся на образ, мы достигаем усвоения логических процессов, необходимых и для запоминания правил, и для развития мышления.

Может явиться мысль, что этот прием потребует больше времени, чем сколько его имеется у учителя. Нет, этого не должно быть и не будет. Может случиться только одно: меньше будет решено задач и примеров на данное правило, так как первые упражнения, решаемые с подробными рассуж-

дениями, потребуют несколько больше времени. Но зато все последующие упражнения будут решены учащимися сознательнее, а может быть и скорее. Изложенный здесь прием испытан хорошими преподавателями, является вполне обоснованным данными психологии и неизменно приводит к очень хорошим результатам.

МЕТОДЫ, КАК ФОРМА ОБУЧЕНИЯ.

Вопросо-ответный метод. Само название вопросо-ответного метода показывает, что обучение ведется по этому методу в форме вопросов и ответов.

Цель вопросо-ответного метода — привлечь внимание учащегося к предмету беседы и сделать его внимание устойчивым, возбуждая у учащегося активность и интерес. Внимание и интерес служат благоприятной почвой для понимания и усвоения, о степени которых преподаватель может судить в каждый момент беседы по ответам учащихся (см. стр. 30).

Вопросо-ответный метод в обучении начальной арифметике является главным методом и может дать прекрасные результаты, если только задачи, которые предлагает преподаватель, и наводящие вопросы, которые он ставит, заставляют мысль учащегося напряженно и живо работать, а вместе с тем вполне для него посильны. Требование это далеко не всегда выполняется. Часто учитель, ведущий урок в вопросо-ответной форме, в затруднительных случаях переходит на мелочные, подсказывающие вопросы и попусту тратит время. В таком случае он поступил бы правильнее, если бы хорошо и просто изложил свою мысль и затем при помощи вопросов выяснил, насколько она понята и усвоена учащимися.

Характер вопросов зависит от ступени развития детей: чем эта ступень выше, тем сложнее и содержательнее должны быть вопросы, тем большей самодеятельности можно требовать от детей.

Вот пример беседы о вычитании 5 из 12 на первом году обучения:

Учт. — Возьмите 1 десяток палочек и 2 палочки. Сколько палочек вы взяли?

От 12 палочек надо отнять 5 палочек. Сколько палочек можно отнять, не развязывая пучка?

Учк. — 2 палочки.

Учт. — Отнимем 2 палочки от 12. Сколько палочек осталось? Нам надо отнять 5 палочек, а мы отняли только 2 палочки. Сколько палочек осталось еще отнять?

Учк. — 3 палочки.

Учт. — У вас один десяток, надо отнять 3 палочки. Отнимите и скажите, сколько осталось?

Учк. — 7 палочек.

Учт. — Теперь вспомним, сколько палочек было, сколько отняли и сколько осталось?

Учк. — Было 12 палочек, мы отняли 5 палочек, осталось 7 палочек.

Учт. — Запишите, что вы сделали. Повторите, как вы отняли от 12 палочек 5 палочек.

Покажем еще образчик вопросо-ответного метода на третьем году обучения при вычитании: 3427 − 1385.

Учт. — Подпишите одно число под другим и расскажите, как подписали. Вычитайте.

Учк. — Из 7 единиц вычесть 5 единиц, получим 2 единицы. Записываем их под единицами.

Учт. — От 2 десятков нельзя отнять 8 десятков. Но в числе 3427 имеются 4 сотни. Сколько сотен надо взять из них, чтобы вычитание 8 десятков было возможно?

Учк. — Одну сотню.

Учт. — Одну сотню возьмем из 4 сотен, да у нас имеется еще 2 десятка. Сколько десятков вы будете иметь? Вычтем 8 десятков и запишем то, что получится.

Учк. — Остается 4 десятка, которые мы подписываем под десятками.

Учт. — Как ты вычел 8 десятков из 1 сотни 2 десятков?

Учк. — В одной сотне 10 десятков да 2 десятка, будет 12 десятков. Из 12 десятков вычтем 8 десятков, получим 4 десятка.

Учт. — Будем говорить так: от 4 сотен берем 1 сотню и раздробляем ее в десятки. Получим 10 десятков да еще 2 десятка, будет 12 десятков. От 12 десятков отнимем 8 десятков, получим 4 десятка. И т. д.

Лабораторный метод. Отвлеченные математические понятия возникают на основе конкретных образов, которые составляют первую и необходимую ступень в образовании этих понятий, и вырабатываются индуктивным путем, главным образом на задачах, понимая задачу в широком смысле (путь — от частного к общему.) Поэтому на уроках арифметики необходимо пользоваться, с одной стороны, теми средствами, которые приводят к конкретным образам, т. е. дидактическим материалом, черчением и рисованием иллюстраций к математическим понятиям, черчением и вырезыванием геометрических фигур, склеиванием разверток и измерением, а с другой стороны — самостоятельным решением детьми задач и примеров, служащих для выяснения и закрепления понятий.

Лабораторным называется такой метод обучения арифметике, который опирается, с одной стороны, на ручные работы детей, а с другой — на самостоятельное решение целесообразно подобранных задач. Лабораторный метод всегда сочетается с вопросо-ответным. Беседа на уроке ведется в форме вопросов и ответов, в то же время дети выполняют работы с дидактическим материалом. Когда требуется для выяснения понятия или для его закрепления решить задачу, то беседа прерывается, и задача решается учащимися самостоятельно, после чего она становится поводом и материалом для возобновления и продолжения беседы.

Поясним лабораторный метод на материале сложения и вычитания долей $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ на третьем году:

Каждый ученик заготовляет дома несколько бумажных кругов и бумажных полос (число указано учителем). Радиус каждого круга 2½ *см*, длина каждой полосы 1 *дм*.

В классе, по указанию учителя, каждый ученик делит один круг пополам, а каждую половину — еще на две равные части.

Учт. — Будем единицу изображать при помощи круга. Разделите свой круг на две равные части. (Каждый делит перегибанием свой круг пополам и разрывает его.) Как называется каждая часть? Сколько половин в круге?

Учк. — В круге — две половины.

Учт. — Разделите каждую половину круга на две равные части. Как называется каждая часть? Сколько четвертей в круге?

Учк. — В круге — четыре четверти.

Учт. — Составьте из четвертей круга полный круг. Сколько в половине круга четвертей?

Подобные же упражнения проделываются над бумажной полосой.

Учт. — Сколько половин в единице? Сколько четвертей в единице? Сколько в половине четвертей?

Запись:

В единице две половины: $1 = \frac{2}{2}$

В единице четыре четверти: $1 = \frac{4}{4}$

В половине две четверти: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

Учт. — Сложим половину и четверть. Разделите целый круг на две равные части. Положите перед собой круг, разделенный на половины, и круг, разделенный на четверти. Возьмите половину и четверть: придвиньте одну к другой. Половина круга и четверть круга — сколько составят четвертей?

Учк. — Полкруга да четверть круга составят три четверти круга.

Учт. — Объясните, как вы это узнали.

Учк. — В половине круга две четверти, да еще четверть — всего три четверти круга.

Все ученики по предложению учителя заменяют полукруг двумя четвертями.

Учт. — Итак, сколько получится, если к половине прибавить четверть? Как это записать?

Запись:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Рассуждая подобным же образом, отнимают от половины одну четверть.

Запись:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Учитель записывает на доске примеры:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \qquad 1\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad 1\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \qquad 1\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \qquad 1\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

Ученики решают примеры, проверяя их с помощью имеющихся у них наглядных пособий.

Решение примеров проверяется с подробными объяснениями. За этим следует беглый счет с теми же долями. Например:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}$$

и другие примеры в этом же роде.

Понимая лабораторный метод широко, к нему надо отнести приемы обучения арифметике, основанные на самостоятельном решении детьми целесообразно подобранных примеров и задач.

Поясним такой прием на материале деления трехзначного числа на однозначное.

Подберем сначала группы задач и примеров, в которых числа разрядных единиц делятся на однозначные числа.

„В день леса" посадили 360 берез, а елочек в три раза меньше. Сколько посадили елочек?

Учт. — Как вы будете решать задачу?

Учк. — Мы 360 деревьев разделим на 3 равные части.

Учт. — Сколько сотен и сколько десятков в числе 360? Разделите 360 на 3. Сколько вы получили? Как вы делили?

Учк. — Я разделил 300 на 3, получил 100. Затем разделил 60 на 3 получил 20. 100 да 20 будет 120. Если 360 разделить на 3, получится 120.

Таким же способом учащиеся решают примеры:

300 : 3 400 : 2 260 : 2 482 : 2
500 : 5 800 : 4 630 : 3 693 : 3

Одни из этих примеров могут быть решены на доске с подробными разъяснениями, другие самостоятельно в тетрадях.

После этого переходим к таким примерам, в которых частное будет состоять из однозначного числа круглых десятков:

12 : 3 15 : 5 24 : 4 36 : 9 48 : 6
120 : 3 150 : 5 240 : 4 360 : 9 480 : 6

Затем ученики решают самостоятельно следующие примеры:

350 : 5 640 : 8 420 : 7 560 : 8 810 : 9

После чего делается разбор решения.

Переходим к примерам, в которых частное состоит из десятков и единиц.

Учт. — Разделим 60 на 4. Как будете делить?

Учк. — Разложим 60 на два числа 40 и 20. Разделим 40 на 4, получим 10. Затем разделим 20 на 4, будет 5. Всего 10 да 5 будет 15.

Учт. — Разделим 130 на 2. Сколько десятков в этом числе? Из 13 десятков — какое число десятков делится на 2? На какие же числа удобно разбить 130, чтобы разделить это число на 2?

Учк. — Мы разобьем 130 на 120 и 10.

Учт. — Сколько получится десятков, единиц? Скажите весь ответ.

Ученики решают самостоятельно примеры:

150 : 2; 170 : 2; 110 : 2; 105 : 3; 135 : 3; 162 : 3; 140 : 4; 175 : 5.

Решения примеров подробно разбираются целым классом.

Кроме примеров следует решить одну-две задачи, в которых числа так подобраны, чтобы частное получалось двузначное. После этих задач переходим к такому случаю деления, в котором частное состоит из сотен и десятков.

Учт. — Разделите 30 на 2. Сколько получилось? Как вы делили?

Учт. — Разделим 300 на 2. Сколько сотен в числе 300? Из 3 сотен какое число сотен делится на 2? На какие числа удобно разбить 300, чтобы разделить это число на 2? Как же разделить 300 на 2?

Учк. — Разобьем 300 на два числа —200 и 100. Разделим 200 на 2, получим 100; 100 разделим на 2, получим 50. Сложим 100 и 50, получим 150.

Можно еще решить сообща примеры — 50 :2 и 500 : 2, после чего ученики решают группу примеров самостоятельно:

70 : 2	90 : 2	45 : 3	54 : 3	75 : 3
700 : 2	900 : 2	450 : 3	540 : 3	750 : 3

Когда урок ведется лабораторным методом, то беседа чередуется с короткими самостоятельными работами учеников. Весьма часто эти работы представляют собой решение групп примеров, тщательно подобранных и расположенных в определенной последовательности.

Примеры каждой из этих групп сходны между собой, каждый следующий пример лишь немного сложнее предыдущего и поэтому не представляет больших трудностей для ученика. Переходя от одного примера группы к другому, ученики подмечают закономерность и затем приходят к правилу. Примеры эти служат вместе с тем материалом для приобретения учащимися навыков.

Лекционный метод. Лекционный метод (в начальной школе — рассказ) вынуждает детей оставаться в пассивном состоянии. Пассивное слушание, когда оно продолжается долго, притупляет внимание и интерес детей, у преподавателя же отнимает возможность контролировать их восприятие во время рассказа. Поэтому в начальном курсе арифметики такой метод находит весьма ограниченное применение. Им пользуются иногда при подведении итогов урока в заключительный момент работы, проведенной в вопросо-ответной форме. Вопросо-ответный метод обладает несомненными достоинствами, особенно в начальном обучении, но у него имеются и недостатки — растянутость и раздробленность мысли. Поэтому после прохождения темы в вопросо-ответной форме возникает потребность привести в связь отдельные части ее, систематизировать их с помощью краткого связного изложения. В этом случае и можно воспользоваться связным рассказом — при условии, чтобы он продолжался короткое время, и только в старших классах начальной школы.

Работа по книге. Говоря о книге, мы имеем здесь в виду учебник арифметики. Потребуется много наблюдений и чисто педологических опытов для решения вопроса о роли учебника в начальном обучении арифметике. В настоящее время об этой роли можно высказать только лишь несколько более или менее вероятных догадок.

Достоинство учебника арифметики, как средства изучения арифметики, составляют точно сформулированные правила и краткие объяснения, изложенные правильным математическим языком. Поэтому при умелом пользова-

нии учебник мог бы стать средством, воспитывающим последовательное мышление и правильную математическую речь. Как же пользоваться учебником?

Учебник арифметики играет некоторую роль при подготовке учителя к новой арифметической теме, помогая в выборе материала, его расположении и в формулировании определений и правил. Однако к нему нельзя предъявлять такие же требования, как к методике арифметики.

В классе каждая новая тема, новый вопрос прорабатываются методически помимо учебника, примеры и задачи предлагаются из задачника или придумываются учителем сообразно с его методическими целями. И когда материал разработан, то для завершения, для его повторения соответствующее место в книге прочитывается сперва под руководством учителя, а затем самостоятельно — дома. Возникает вопрос, есть ли необходимость при чтении книги в классе перечитывать полностью объяснение правила? Некоторые объяснения полезно прочитать целиком, в других — можно выделить для чтения главные части, прочее может быть дополнено учащимися у доски. Например, читают:

„Умножим 486 на 34. Чтобы 486 взять 34 раза, достаточно взять это число 30 раз и 4 раза, затем полученные произведения сложить“.

Учащиеся выполняют действия на доске, под руководством учителя, без книги. Далее читают:

„Так как произведение 14 580 получилось от умножения 486 на 30, то оно оканчивается нулем. Этот нуль не пишут; чтобы сохранить его место, второе произведение подписывают под первым, отступив влево на одну цифру“.

Когда пройдена целая математическая тема, учащимся может быть предложено повторение главнейших мест по учебнику.

Такое повторение будет служить для объединения разрозненных частей темы и будет способствовать систематизации и усвоению знаний (стр. 28 и 29).

НАГЛЯДНОСТЬ.

Значение наглядности. Наглядность в начальном курсе арифметики служит средством для расширения круга представлений детей и для развития их мышления.

Для примера проследим, как в сознании учащихся расширяется область целых чисел и какую роль при этом играют наглядные образы чисел.

В пределах первого десятка числовые понятия возникают на основе групповых образов и счета предметов. Наглядными пособиями при этом служат числовые фигуры, естественные группы предметов, разнообразные предметы счета.

В пределах сотни и тысячи для развития представлений о десятичных группах, как основе устной и письменной нумерации, прибегают к весьма целесообразным пособиям — к пучкам, составленным из соломинок или палочек, и к длинной бумажной ленте, на которой нанесены сантиметры, дециметры и метры.

Для дальнейшего расширения числового понятия пучки становятся уже непрактичным и ненужным средством. В это время появляется потребность в других образах — в условных изображениях десятичных групп числа на счетах и в клетках на бумаге.

Итак, расширение круга числовых представлений совершается под влиянием наглядности. Расширяется числовая область, меняются и наглядные пособия: наглядные образы переходят в условные, а затем в цифровые образы.

На основе наглядности постепенно развивается мышление учащихся. Логический процесс становится понятным для детей, если он нагляден.

$$
\begin{array}{c}
27 + 27 + 27 \\
27 + 27 + 27 \\
27 + 27 + 27 \\
27 + 27 + 27 \\
27 + 27 + 27 \\
27 + 27 + 27 \\
27 + 27 + 27 \\
27 + 27 + 27 \\
27 + 27 + 27 \\
27 + 27 + 27 \\
\hline
27 \cdot 30 = (27 \cdot 3) \cdot 10
\end{array}
$$

Чтобы детям понятно было умножение $27 \times 30 = (27 \times 3) \times 10$, необходимо показать наглядную запись этого умножения.

Умножение на круглые сотни иллюстрировать затруднительно. Да в этом нет и необходимости. Ребята в своем воображении могут распространить прием умножения $27 \cdot 30 = (27 \cdot 3) \cdot 10$ и на случай, когда множитель состоит из круглых сотен, например, $27 \cdot 300 = (27 \cdot 3) \cdot 100$.

Чтобы наглядность была действительным средством для развития мышления, наглядными пособиями надо пользоваться так, чтобы учащиеся на них усваивали вычислительные процессы и учились рассуждать. Так, умножая 27 на 30 и имея перед собой приведенную выше таблицу, ученик рассуждает:

Узнаю, сколько единиц в каждой строке: $27 \cdot 3 = 81$. Теперь узнаю, сколько во всех десяти строках: $81 \cdot 10 = 810$.

Наглядность не есть самоцель: ею надо пользоваться так, чтобы ученики умели затем производить вычисления и без наглядных пособий, т. е. чтобы потребность в ней становилась все менее и менее настоятельной.

В преподавательской среде можно встретить предубеждение по отношению к наглядным пособиям. Говорят, что арифметика должна развить абстрактно-логическое мышление, и наглядность будто бы этому мешает. Утверждающие это не думают, что в детском возрасте образ является главным, а часто единственным средством для того, чтобы сделать суждение понятным и убедительным. Например, для того чтобы учащийся вполне понимал умножение на круглые десятки, он должен представить себе ряды чисел

или групп предметов, подобные тем, которые изображены на стр. 42. Если этого образа он не будет иметь перед собой, его суждение будет смутно и даже неясно. Оно сведется к заученной фразе: при умножении на круглые десятки, надо сперва умножить на цифру десятков, затем к произведению приписать нуль. Эта фраза будет выражать суждение, никак не мотивированное, ничем не оправданное. Если бы мы в начальном обучении арифметике не пользовались наглядностью, то все арифметические суждения детей представляли бы собой заученные фразы, ничем необоснованные, лишенные связей, смутные и недолговечные. Правда, это, пожалуй, были бы абстракции, но бесплодные для мышления, ибо ребенок ясно понимает то, что образно, а что для него необразно, то и не вполне ясно, почти что пустота.

Классификация пособий. Наглядные пособия можно разделить на две группы — демонстрационные (классные, показательные) и лабораторные (дидактический материал). К первым преподаватель прибегает во время беседы со всей группой. Таковы — классные счеты, прутики, геометрические тела, плакаты, чертежи на доске и др. Лабораторные пособия даются в руки учеников или ими изготовляются. Лабораторными могут быть названы: различные предметы счета, разрезные цифры, чертежи учащихся, вырезки из бумаги и др. О роли лабораторных пособий *см*. стр. 37.

Классные пособия иногда называются пассивными, а лабораторные — активными. Эти названия имеют условный смысл, указывая на то, что классные пособия только показываются, а лабораторные даются в руки детей. Разумеется, преподаватель и с классными пособиями должен вести занятие так, чтобы они давали поводы для работы мысли, для предвидения и тем возбуждали возможно большую активность учащихся. Поясним сказанное примером:

Учитель поясняет на классных счетах умножение 8 на 4: откладывает по 8 шариков на четырех проволоках.

Учт. — По 8 взять 4 раза. Сосчитайте, сколько получится?

Учк. — По 8 взять 4 раза, получится 32.

Учт. — Как ты вычислил?

Учк. — К 8 прибавил 8, получил 16, к 16 прибавил 8, получил 24, к 24 прибавил 8 получил 32.

Учитель на доске, а дети в тетрадях записывают:

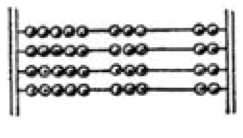
$$8 + 8 + 8 + 8 = 32 \quad 8 \times 4 = 32.$$

Затем учитель сдвигает два ряда шариков на счетах немного вправо и предлагает сосчитать иначе, скорее.

Учк. — По 8 взять 2 раза, и еще по 8 два раза. Получим 16 и 16, вместе 32. (Следует запись).

Учт. — Можно еще иначе вычислить. Подумайте, как это сделать?

Учк. — Можно на каждой проволоке шарики раздвинуть: 5 шариков и 3 шарика. По 5 взять 4 раза, будет 20, по 3 взять 4 раза, получится 12. 20 да 12 будет 32.



Черт. 5.

Если бы учащиеся не догадались это сделать, то учитель мог бы сам навести их на мысль о таком приеме умножения.

Для достижения большей образности вычислительных процессов, полезно сопоставлять наглядные и цифровые образы.

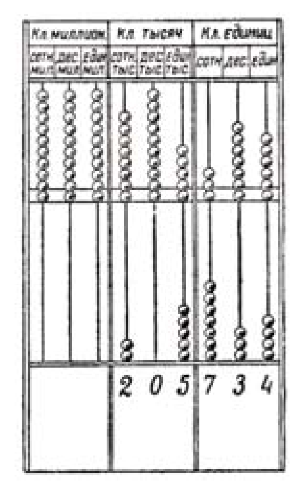
$$5 \cdot 4 = 20 \qquad 3 \cdot 4 = 12$$

$$20 + 12 = 32.$$

Фабричные пособия. Даем описания наглядных пособий, которые должны быть изготовлены мастерскими наглядных пособий или фабриками:

1. Русские счеты. Счеты состоят из высокой деревянной рамы, стоящей на ножках. В раме продеты горизонтальные проволоки (10 проволок и более), на которые надеты деревянные шарики, по 10 шариков на проволоке. Сверху рамы укреплены короткие вертикальные проволоки, на которые насаживаются шарики, служащие для изображения разрядных чисел при изучении нумерации. Русские счеты — незаменимое пособие, которое должно служить в начальной школе для выяснения всех основных арифметических понятий.

2. Вертикальные счеты. Эти счеты представляют собой раму, разделенную на три части. В каждой части укреплены по три *вертикальных проволоки*, на которые надеты шарики, по 10 шариков на каждой проволоке. Шарики могут поддерживаться на весу при помощи особых пружинок, прикрепленных к планке по другую сторону проволок.



Черт. 6.

Счеты служат для изучения нумерации. Удобства этого пособия заключаются в том, что группы шариков, изображающих разряды числа, расположены в них справа налево, как и цифры при записи числа.

3. Набор мер. а) Деревянный метр, разделенный на дециметры и сантиметры.

б) Жестяной кубический ящик, емкостью в 1 литр.

в) Жестяная кружка, емкостью в 1 литр.

г) Мензурки — в 500 куб. *см* и в 50 куб. *см*.

д) Набор разновесок (1 *кг*, 500 *г*, 200 *г* и т. д.)

е) Кубический метр, составленный из 12 деревянных палок, скрепленных у вершин куба деревянными кубиками.

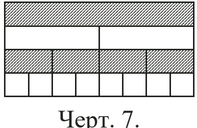
ж) Разборный кубический дециметр, состоящий из 9 квадратных деревянных пластинок, 9 брусков и 10 кубических сантиметров. Все эти части помещаются в жестяном кубическом ящике.

4. Весы. Весы стоячие с нагрузкой в 2 *кг*.

5. Ц и ф е р б л а т . Циферблат представляет собой круг, диаметром в 30–40 *см*. На круге отчетливо изображены часовые и минутные деления с цифрами. К кругу прикреплены минутная и часовая подвижные стрелки. Прибор служит для обучения отсчитыванию по часам времени и для решения задач на время.

6. П о с о б и я д л я и з у ч е н и я д р о б е й . а) Набор цветных кругов из папки и долей круга. Набор составляют: 2 целых круга (диаметра 25 *см*), и круги, составленные из половин, четвертей, восьмых, третей, шестых долей, пятых и десятых долей. Различные доли окрашены в разные цвета. Круги и секторы имеют отверстия, через которые их можно прикрепить кнопками к доске. Прибор служит для пояснения всех основных операций с дробями.

б) Набор полос из папки с отверстиями для прикрепления к доске. Полосы (длиной в 45 *см.*) — разноцветные: одна из них без делений, прочие разделены линиями, далеко заметными, на 2, 4, 8, 3, 6, 12, 5 и 10 частей. Полосы служат для изображения долей единицы и главным образом для преобразования долей. (Черт. 7.)



Черт. 7.

в) Доска из мягкого дерева, которая может подвешиваться к раме классных счет или к классной доске. К доске могут прикрепляться кнопками пособия, описанные в пунктах а) и б).

7. Н а б о р к у б и к о в . а) Набор содержит 64 кубика, ребра каждого кубика 4 *см*. Из кубиков составляются прямоугольные параллелепипеды разных размеров при изучении их объема.

б) Набор кубиков, состоящий из 64 кубических сантиметров, для каждого ученика.

8. Г е о м е т р и ч е с к и е т е л а . а) Набор геометрических тел из папки: куб (15 *см* × 15 *см* × 15 *см*), куб (10 *см* × 10 *см* × 10 *см*), прямоугольные параллелепипеды (12 *см* × 12 *см* × 25 *см*; 10 *см* × 18 *см* × 20 *см*; 12 *см* × 15 *см* × 20 *см*), прямая треугольная призма (сторона треугольника 12 *см*, высота 20 *см*).

б) Геометрические тела из дерева: куб (10 *см* × 10 *см* × 10 *см*), прямоугольный параллелепипед (10 *см* × 10 *см* × 16 *см*).

в) Проволочные геометрические тела: куб (25 *см* × 25 *см* × 25 *см*), прямоугольный параллелепипед (16 *см* × 16 *см* × 25 *см*), треугольная призма (сторона треугольника 15 *см*, высота 25 *см*).

9. П р и б о р ы д л я и з м е р е н и я н а м е с т н о с т и . а) Вехи (наборы по 10 штук); б) шпильки (наборы по 10 шпилек); в) мерный шнур (длина в 10 *м*), к нему две вехи; г) эккер (простейший, в виде креста, на заостренной палке).

10. Т а б л и ц а м е т р и ч е с к и х м е р .

Самодельные пособия. Перечислить самодельные пособия невозможно, потому что они могут быть весьма разнообразны и представляют собой результат свободного творчества учителя и учащихся. Поэтому мы назовем здесь несколько групп этих пособий главным образом для того, чтобы ими стимулировать дальнейшую изобретательность и творчество преподавателя.

Образы числа. 1. Предметы счета: соломинки, прутики, камешки, кружки, квадраты и др.

2. Цифры на карточках.

3. Числовые фигуры, например, фигуры *Лая*.

4. Рисунки, служащие для иллюстрации состава числа (Н. С. Попова. — Учебник арифметики, ч. I).

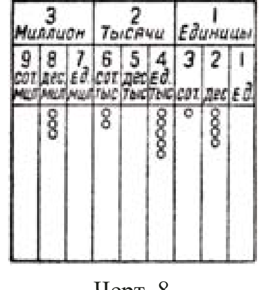
5. Числовая лесенка на папке (Учебник арифметики, ч. I, стр. 11).

6. Числовая лесенка, составленная из отдельных цветных полос.

7. Пучки из прутиков или соломинок для составления чисел в пределах 20, 100 и 1000.

8. Полосы, разделенные на квадраты, для иллюстрации чисел второго десятка и первой сотни.

9. Бумажная лента с закрашенными на ней сантиметрами, дециметрами и метрами для иллюстрации нумерации в пределах тысячи.



Черт. 8.

10. Абак для иллюстрации нумерации многозначных чисел. Прибор делается из плотной папки и показан на чертеже 8.

Разрядные числа изображаются кружками или цифрами, наклеенными на картонные полосы, которые вставляются в соответствующие перегородки прибора.

Образы арифметических действий.

1. Предметы счета.

2. Числовая лесенка (Учебник арифметики, ч. I, стр. 14, 15, 18).

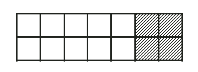
3. Прибор, иллюстрирующий состав числа первого десятка (Учебник арифметики, ч. I, стр. 20).

4. Магические квадраты.

5. Числовой круг для развития навыков в сложении и вычитании (Учебник арифметики, ч. I, стр. 29).

6. Набор карточек с круговыми примерами (стр. 168).

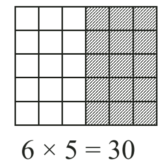
7. Таблица умножения. Набор прямоугольников для иллюстрации приемов умножения.



2 × 7 = 14   2 × 5 = 10   2 × 2 = 4

10 + 4 = 14

Черт. 9.



3 × 5 = 15   6 × 5 = 30

15 + 15 = 30

Черт. 10.

8. Таблица деления. Набор прямоугольников для иллюстрации понятия деления и таблицы деления.

4 × 3 = 12	3 × 4 = 12
12 : по 4 = 3	12 : по 3 = 4
12 : на 3 = 4	12 : на 4 = 3

Черт. 11.

9. Набор пучков, составленных из прутиков для иллюстрации внетабличных действий. Подобный же набор полос, разделенных на квадраты.

10. Приборы для иллюстрации последовательного умножения на 4, 6, 8; на 20, 30, 40 и т. д. На чертеже изображается умножение 4 на 30.

<table>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="3">12</td><td colspan="3">12</td><td colspan="3">12</td><td colspan="3">12</td><td colspan="3">12</td><td colspan="3">12</td><td colspan="3">12</td><td colspan="3">12</td><td colspan="3">12</td><td colspan="3">12</td></tr>
<tr><td colspan="30">120</td></tr>
</table>

Черт. 12.

11. Прибор для иллюстрации последовательного деления (240 : 30).

<table>
<tr><td colspan="30">240</td></tr>
<tr><td colspan="10">80</td><td colspan="10">80</td><td colspan="10">80</td></tr>
<tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr>
</table>

Черт. 13.

Образы дробей: 1. Половина, четверть и восьмая доли (Половина, четверть и восьмая доля круга и квадрата).

2. Пособия для преобразования дробей (стр. 324 и 326).

3. Пособия для сложения и вычитания дробей (стр. 326 и 382).

4. Пособия для вычисления частей числа (стр. 328).

5. Пособия для вычисления числа по данной его части (стр. 385).

Образы геометрических фигур. 1. Квадрат, прямоугольник, треугольник, круг.

2. Части здания и орнаменты, в которые входят фигуры — квадрат, треугольник, прямоугольник, круг.

3. Мерные веревки, колышки, вехи.

4. Квадрат, разделенный пополам, преобразование его в другие фигуры — параллелограмм, треугольник.

5. Пособия для пояснения понятия площади (Учебник, ч. III, стр. 17).

6. Пособия для пояснения измерения площади прямоугольника.

7. Набор прямоугольников и многоугольников (с прямыми углами) для измерения площади.

8. Набор планов для измерения по ним расстояний и площадей прямоугольных фигур.

9. Прямоугольные диаграммы для их чтения.

10. Модели кубов и прямоугольных параллелепипедов.

11. Развертки куба и прямоугольного параллелепипеда.

12. Набор кубов и прямоугольных параллелепипедов (из дерева) для пояснения понятия объема (Учебник арифметики, ч. III, стр. 39).

13. То же из папки.

14. Набор прямоугольных тел для измерения их объемов.

15. Подвижная модель треугольника, для получения треугольников трех типов.

ОРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ.

Общие замечания. „Основной формой организации учебной работы в начальной и средней школе должен являться урок с данной группой учащихся, со строго-определенным расписанием занятий и твердым составом учащихся.

„Эта форма должна включить в себя, под руководством учителя, общегрупповую, бригадную и индивидуальную работу каждого учащегося с применением разнообразных методов обучения. При этом должны быть всячески развиваемы коллективные формы учебной работы, не практикуя организации постоянных и обязательных бригад“. (Постановление ЦК ВКП(б) от 25 августа 1932 года.)

Таким образом „систематическое усвоение наук“ (в частности математики) на основе определенных учебных планов, программ и расписаний осуществляется через *урок*.

При построении урока необходимо исходить из *рабочего плана*, частью которого является данный урок. Рабочий план представляет собою развитие одного из вопросов *производственного плана*. Производственный план, располагающий учебный материал по темам с указанием сроков проработки каждой темы, опирается на *программу* и *учебный план*.

Рассмотрим каждый из этих этапов организации работы в отдельности.

Программа. Чтобы построить производственный план работы по математике в начальной школе, надо прежде всего познакомиться с программой НКП для младших классов средних школ и начальной сельской школы. За год должен быть пройден весь программный материал, но „в зависимости от подготовленности группы и от других местных условий материал этот может *частично перемещаться из одной четверти в другую*“ (Вводная записка).

Внутри четверти материал сгруппирован по разделам, но было бы неправильно прорабатывать сначала целые числа, затем дроби и только после этого переходить к измерениям. „Методика работы по математике требует *увязки этих элементов* между собою и умелого использования геометрического

материала для арифметики, равно как и арифметических навыков для работ по измерению, по вычислению площадей и объемов“. (Вводная записка).

„В практической работе, наряду с усвоением нового материала, должно иметь место *повторение* и закрепление пройденного“. „Работа каждой четверти, равно как и работа всего года, должна заканчиваться повторением и *учетом* знаний учащихся в объеме пройденного; на повторение и учет может выделяться от 5 до 10 часов в четверть“. (Вводная записка).

Учебный план. Для того, чтобы расположить весь учебный материал во времени с обозначением сроков проработки каждой темы, необходимо учесть постановление Коллегии НКП РСФСР от 19 ноября 1932 года, устанавливающее продолжительность учебного года и учебную сетку для сельской и для городской школы. Согласно с этим постановлением продолжительность учебного года для *сельской школы* исчислена *в 36 недель* (с 1 сентября по 1 июня при семидневной рабочей неделе), а для *городской школы — в 38 недель* (с 1 сентября по 20 мая при шестидневной рабочей неделе). При этом на математику отводится в каждом классе сельской школы по 6 часов и в каждом классе городской школы — по 5 часов в неделю. Необходимо отметить, что календарные сроки начала и конца каждой четверти в этом постановлении не указываются: обычно они устанавливаются очередными распоряжениями органов НКП.

Производственный план. Задача производственного плана — разбить весь программный материал по темам, расположить эти темы в один последовательный ряд и установить необходимое на проработку каждой темы число уроков. В программе, как уже указывалось, материал сгруппирован по разделам; в производственном плане арифметические темы должны быть тесно увязаны с элементами геометрии и измерения. Отсюда в производственном плане мы имеем: *арифметические темы*, в которых элементы геометрии и измерение играют вспомогательную, служебную роль или же вводятся в целях повторения и закрепления пройденного, и *геометрические темы*, в которых вычисления связаны с измерением или даются независимо от геометрического материала. В конце каждого раздела и в конце каждой четверти отводится несколько уроков на *повторение пройденного* и на *учет работы*.

Производственные планы для каждого года обучения начальной школы, а также образцы рабочих планов и примерные разработки уроков войдут в особое приложение к настоящей книге, которое будет выпущено в виде отдельной брошюры.

Рабочий план. Рабочий план, как уже указывалось, представляет собою развитие одного из вопросов производственного плана.

Всякая арифметическая тема делится на „методические единицы“.[1]

---

[1] Выражение немецкого педагога-философа (XIX в.) Циллера.

Так, тема „таблица умножения и деления“ расчленяется на следующие методические единицы: умножение и деление по 5, умножение и деление по 3 и т. д. Методическая единица должна быть разделена, в свою очередь, на уроки.

Например, таблица умножения и деления по 5 может быть проработана в 6 уроков:

1) 5 × 2; 5 × 4; 5 × 8.
2) 5 × 3; 5 × 6; 5 × 9.
3) 5 × 5; 5 × 10; 5 × 7.
4) 10 : 5; 20 : 5; 40 : 5.
5) 15 : 5; 30 : 5; 45 : 5.
6) 25 : 5; 50 : 5; 35 : 5.

Задача рабочего плана — дать схему проработки такой методической единицы по урокам. При этом должны быть указаны: тема и содержание урока, виды работы (решение задач и примеров, черчение, измерение и пр.), организация работы (общеклассная работа под непосредственным руководством учителя, индивидуальная работа под наблюдением учителя, самостоятельная работа и т. п.) и, наконец, необходимые пособия и дидактический материал (классные счеты, разрезные цифры и знаки действий, геометрические фигуры и тела и т. д.).

Построение урока. Каждый урок учитель строит, следуя рабочему плану. Краткую схему он должен при этом развить в подробный конспект.

В конспекте дается план урока с точным распределением материала во времени. Затем следует подробная разработка содержания урока. Для наиболее важных и ответственных моментов необходимо наметить примерные формулировки наводящих вопросов учителя и предполагаемых ответов учеников. В конспекте должны быть приведены примеры и задачи, на которых будет прорабатываться, закрепляться то или иное математическое понятие. Наконец, в конспекте должны быть указаны способы применения демонстрационного и раздаточного материала.

Процесс преподавания математики складывается из следующих этапов:

а) Разработка нового понятия.

б) Упражнения, служащие для укрепления теории и связи ее с практикой.

в) Учет.

В соответствии с этим можно различать уроки трех типов:

1. Урок, на котором дается новый программный материал.
2. Урок тренировки в решении задач и примеров, в измерении и черчении.
3. Контрольная работа.

Решение задач и примеров не является исключительной принадлежностью уроков второго типа. Само собою разумеется, что на каждом уроке, независимо от его типа, дети решают задачи и примеры или же занимаются изме-

рением и черчением. То же можно сказать и об учете, который неразрывно связан с обучением и существует на каждом его этапе. Таким образом, говоря о типе урока, мы имеем в виду не материал его, а целевую установку.

1. Урок первого типа. Урок, на котором дается новый программный материал, состоит из следующих частей:

а) проверка домашней работы;

б) устные вычисления;

в) лабораторная проработка нового понятия;

г) упражнения под руководством учителя для закрепления нового понятия;

д) самостоятельные упражнения в решении примеров и задач и

е) задание на дом.

Обычно домашняя работа является либо завершением предыдущего урока, либо подготовкой к новому уроку. И в том, и в другом случае целесообразнее начинать урок с проверки домашней работы, тем более что учащиеся обычно с нетерпением ждут этой проверки.

Устные вычисления имеют целью либо тренировку в вычислительной беглости, либо подготовку к центральной части урока — усвоению нового математического понятия. В первом случае удобнее начать урок с устных вычислений, чтобы не нарушать в дальнейшем логической цельности урока. Во втором случае устные вычисления должны естественно предшествовать разработке нового понятия.

Поясним на примере, как строится центральная часть урока — лабораторная проработка нового понятия. Возьмем умножение многозначного числа на 10.

Прежде всего учитель вводит детей в работу, объясняя ее цель.

Затем происходит накопление материала для наблюдений. Пользуясь устными вычислительными приемами, учащиеся решают ряд примеров:

$$5 \times 10 = 50$$
$$7 \times 10 = 70$$
$$26 \times 10 = 260$$
$$48 \times 10 = 480$$

Далее учащиеся делают наблюдения над собранным материалом путем сопоставления в каждом примере множимого и произведения.

После этого они формулируют вывод: во всех случаях произведение отличается от множимого только тем, что у произведения на конце справа стоит нуль.

Добытый путем наблюдения результат надо осмыслить. При помощи наводящих вопросов учитель помогает детям понять, что появление нуля связано с перемещением всех цифр множимого на одно место влево. Вследствие этого каждое разрядное слагаемое, а следовательно и все число увеличивается в 10 раз.

Теперь остается только вывести правило: чтобы умножить число на 10 достаточно приписать к нему справа нуль.

В других случаях лабораторная проработка нового понятия связана с применением дидактического материала. Тогда эта часть урока начинается с раздачи материала и знакомства с ним. Вообще, трудно было бы дать схему, годную для любой темы на любом году обучения в начальной школе. В каждом отдельном случае надо поступать сообразно с его особенностями.

После проработки нового понятия естественно перейти к упражнениям в решении задач и примеров. Сначала дети работают под руководством учителя, а затем и самостоятельно.

Урок заканчивается заданием работы на дом. Необходимо в этом случае избегать списывания примеров и задач с доски. Во-первых, на это уходит много времени,

которое надо беречь, а во-вторых, дети часто списывают с ошибками, которые мешают им выполнить работу. Лучше всего давать нетрудные примеры и задачи по учебнику. На дом можно давать только такие работы, к самостоятельному выполнению которых дети вполне подготовлены.

На первом и втором годах обучения домашняя работа не должна требовать от ученика более 20 мин., а на третьем и четвертом году — более 30 мин.

2. Урок второго типа проще по своей структуре, чем только что разобранный первый тип. Проверка домашней работы и устные вычисления занимают и в этом случае свое обычное место в начале урока. Затем следует решение задач или примеров, или же измерение и черчение. Работу эту можно вести фронтально, целым классом, но можно также, сообщив детям задачу или пример, предоставить им действовать самостоятельно. В этих случаях учитель обходит класс, следит за работой каждого ученика в отдельности и помогает отстающим. По окончании работы, она проверяется всем классом под руководством учителя. При измерениях бывает иногда целесообразно разбить учащихся на небольшие группы (бригады). Заканчивается урок заданием работы на дом. Таким образом, урок тренировки может состоять из следующих частей:

а) проверка домашней работы;

б) устные вычисления;

в) решение задач, примеров или же упражнения в измерении и черчении под руководством учителя;

г) самостоятельное решение задач и примеров, самостоятельное измерение или черчение;

д) задание на дом.

3. Урок третьего типа. К этому типу уроков мы отнесли контрольные работы. Давая детям такую работу, не следует отвлекать их внимание в сторону. Обычная в начале урока проверка заданного и беглый счет были бы здесь неуместны. Задание на дом перед контрольной работой может заключаться в повторении пройденного по учебнику. Тогда отпадает и самая необходимость в проверке домашней работы.

Таким образом урок начинается с раздачи особых тетрадей, которые обычно хранятся у учителя и предназначаются только для контрольных работ. Учитель пишет на доске примеры, задачи и вопросы, объясняя, как расположить в тетради материал, что списывать, а что — только читать и т. д. Никаких разъяснений по существу давать в это время не следует. Необходимо каждый раз предупреждать учащихся, что все вычисления, которые придется сделать, должны быть полностью занесены в тетрадь. Никакие записи и вычисления на стороне, на клочках бумаги или в черновых тетрадях не допускаются. Устные вычисления записываются в строчку, письменные — столбиком. Работы, в которых будут обозначены только результаты вычислений, учитель просто не должен принимать.

За 5 минут до истечения положенного на работу срока учитель предупреждает детей, чтобы они еще раз внимательно просмотрели все, что успели сделать. По прошествии этих 5 минут, все ученики должны сдать свои тетради учителю.

УЧЕТ РАБОТЫ.

Общие замечания. Постановление ЦК ВКП(б) от 25 августа 1932 года дает следующие указания относительно учета школьной работы:

„В основу учета школьной работы должен быть положен текущий индивидуальный, систематически проводимый учет знаний учащихся. Препо-

даватель должен в процессе учебной работы внимательно изучать каждого ученика.

„На основе этого изучения преподаватель обязан в конце каждой четверти составлять характеристику успеваемости каждого ученика по данному предмету. Всякие сложные схемы и формы учета и отчетности — запретить. Считать необходимым установление в конце года проверочных испытаний для всех учащихся“.

Вникая в смысл этого постановления, мы должны прежде всего подчеркнуть, что учет знаний учащегося должен быть неразрывно связан с приобретением знаний, должен составлять неотъемлемую часть педагогического процесса.

Планируя работу, разбивая ее по четвертям года, по отдельным темам, и наконец, по урокам, мы намечаем тем самым и виды учетной работы. Вот эти виды: 1) учет на уроке, 2) учет по данному разделу курса, 3) четвертной учет и, наконец, 4) годовой учет, которым заканчивается курс данного класса.

Первые два вида учета — учет на уроке и учет по данному разделу курса — подходят под понятие „текущего, индивидуального, систематически проводимого учета“, связанного с „внимательным изучением каждого ученика“, о котором говорит постановление ЦК. Четвертной учет и годовые проверочные испытания, преследуя свои особые цели, должны быть, тем не менее, тесно связаны с этим повседневным индивидуальным учетом, без которого учитель не может составить сколько-нибудь содержательную характеристику успеваемости ученика по данному предмету.

Учитывая работу по тому или иному отрезку урочного, четвертного или годового плана, мы имеем целью, вообще говоря, узнать, усвоил ли ученик данный вопрос курса, т. е. приобрел ли соответствующие математические понятия, овладел ли соответствующими навыками и научился ли самостоятельно применять эти знания и навыки на практике. Попутно мы оцениваем способности ученика — его память, сообразительность, находчивость, навыки устной и письменной речи, а также некоторые моменты воспитательного порядка — исполнительность, аккуратность и т. п. Только в том случае учет не выродится в пустую формальность, если мы будем принимать во внимание все указанные стороны работы и личности ученика.

Понимая учет таким образом, мы должны признать недостаточной балльную систему, независимо от того, представлена ли она цифрами или словесными обозначениями (уд., неуд., хор., отл.). Необходимо, как это отмечает и постановление ЦК, давать наряду с баллами качественную „характеристику успеваемости каждого ученика“.

Критерием оценки при поверхностном отношении к учету чаще всего является количество ошибок. Однако было бы совершенно неправильно упускать из виду качество ошибки. Наоборот, в основе правильного учета лежит

пристальное изучение и тщательная классификация ошибок и различных недочетов в работе учащихся. В соответствии с теми сторонами работы, на которые направлен учет (см. выше), эти ошибки могут быть следующего рода: 1) ошибки непонимания; 2) ошибки, происходящие от нетвердых навыков; 3) недочеты, связанные с недостатком сообразительности, находчивости, творчества; 4) внешние недочеты устной и письменной речи; 5) ошибки рассеянности и, наконец, 6) ошибки которые зависят от недостаточной методической и научной подготовки учителя. Наиболее стойкими являются, к сожалению, ошибки этого последнего рода.

Классификация ошибок и изучение их причин не только дают возможность правильно и по существу оценить работу учащихся, но обеспечивают также гибкость преподавания и быстрое исправление на ходу его недочетов. Что касается способов фиксации учета, то, согласно постановлению ЦК, не должны применяться, „сложные схемы и формы учета и отчетности“. Классный журнал и личная тетрадь учителя для записи наблюдений — вот все, что требуется в этом отношении.

Учет на уроке. Текущий учет осуществляется в процессе повседневной работы на уроке. Он может производиться на основании устных ответов, домашних и классных письменных работ.

Обычно урок начинается с проверки домашней работы. Один из учащихся читает вслух пример или рассказывает ход решения задачи. При участии всего класса исправляются ошибки. Каждый учащийся сам вносит поправки в свою работу, зачеркивая неправильную запись и делая над ней или рядом правильную.

Беглый счет дает учителю ряд наблюдений, которые нет надобности фиксировать. Отмечаются лишь особо яркие случаи, например, незнание таблицы сложения в конце первого года обучения или незнание таблицы умножения в третьем классе и т. п.

Затем идет обычно лабораторная проработка нового материала, которая ведется в вопросо-ответной форме. Ответы учащихся выявляют здесь прежде всего их сообразительность и уровень логического развития. Здесь учитель наблюдает их речь. Необходимо весьма внимательно относиться к ответу ученика. Часто недостаток речи мешает ему высказать правильное суждение. Бывают ученики, хорошо понимающие, но медлительные, тяжкодумы. Поэтому не следует торопить ученика. Надо терпеливо его дослушать и постараться найти в его ответе правильную мысль, если она есть. Заниматься в это время фиксацией ошибок и недочетов в детских ответах, как и во время беглого счета, неудобно, за исключением тех случаев, когда обнаружатся какие-либо серьезные пробелы в прошлом, например, незнание нумерации, неумение отличить деление по содержанию от деления на равные части и т. п.

После этого наступает момент закрепления нового материала сначала под руководством учителя, а затем и путем самостоятельной работы. При этом дети решают примеры и задачи у доски, или у себя в тетради. В первом случае учителю удобно отметить в журнале ответы учеников. Во втором случае, обходя класс и просматривая работу детей, учитель делает пометки в своей личной тетради. При этом он должен глубже вникать в те затруднения, которые испытывают дети, и если нужно, давать им некоторые дополнительные указания. Необходимо тут же обращать внимание на внешнюю сторону записей, в частности на то, как дети пишут цифры и знаки действий. Проверка самостоятельной работы проводится совершенно так же, как и проверка домашнего задания в начале урока.

В классном журнале против даты урока полезно записывать хотя бы в самых кратких словах его содержание. Например: „приб. и отн. по 2“, или „умн. и дел. по 8“ или „вычит. мног. чисел“ и т. п. Тогда ничего неговорящие „уды“ и „неуды“ наполнятся определенным содержанием.

В конце журнала должен быть раздел, где после урока учитель отмечает его тему и материал, на котором она проработана, а также содержание домашнего задания к следующему уроку.

Текущий повседневный учет был бы неполным, если бы учитель не проверял время от времени тетради учеников. Делать это можно постепенно, разбив весь класс на группы, установив определенную очередь с таким расчетом, чтобы каждая тетрадь попадала в руки учителя не реже, чем один раз в месяц. Просматривая тетради ученика, учитель должен исправлять все замеченные ошибки и отмечать наиболее существенные из них в своей тетради.

В личной тетради учителя должна быть на каждого ученика особая страничка, куда учитель заносит все свои наблюдения и оценку работы ученика. Только при наличии таких записей, которые накапливаются в течение года, можно дать обоснованную оценку успешности учащегося при переходе в следующий класс.

Учет по данному разделу курса. Каждый раз, когда заканчивается проработка определенной главы или раздела курса, детям дается контрольная письменная работа. Такая работа отличается от повседневных упражнений прежде всего своей целевой установкой. Главная цель ее — проверка пройденного, тогда как цель обычных письменных упражнений — тренировка, развитие вычислительной техники, выработка навыков самостоятельной работы и умения прилагать знания и навыки на практике.

Контрольные работы, вообще говоря, не продвигают учащихся вперед по пути усвоения курса, но все же они являются одним из важных факторов обучения, поскольку в это время ученику предоставляется полная самостоятельность. Необходимо достаточно часто ставить учащихся в такие условия,

если мы хотим, чтобы необычность положения не влияла плохо на показатели успешности и чтобы контрольные работы приносили свою долю пользы ученику.

Число контрольных работ в течение года может колебаться от 10 на первом году обучения до 16 в четвертом классе. Необходимо строить их с таким расчетом, чтобы все узловые вопросы курса нашли в них свое отражение.

Контрольные работы должны быть двух видов: работы, содержащие задачи с текстом, и работы, состоящие из примеров и вопросов. Такая однородность содержания облегчает оценку этих работ. Кроме того, трудно требовать, чтобы в течение одного урока учащиеся успели выявить себя со всех сторон. Либо они начнут с примеров и не успеют решить задачи, либо начнут с задачи, и не кончат примеров. Поэтому целесообразнее делать всегда две отдельные работы, одну состоящую из задач, другую из примеров. Вопросы, в зависимости от их содержания, могут входить в ту и в другую.

В стабильных учебниках по первому и второму году обучения дается специальный материал для проверки пройденного. Этот материал еще настолько прост, что его подразделение на примеры и задачи не является настоятельно необходимым. Сказанное выше о двух видах контрольных работ относится таким образом к третьему и четвертому классам.

На контрольную работу для первого года обучения достаточно отвести 15—20 минут. На втором году материал контрольной работы может быть рассчитан на 30—35 минут, на третьем и четвертом году контрольная работа занимает целый учебный час.

Чтобы показать связь контрольных работ с производственным планом, назовем темы контрольных работ для третьего года обучения:

1. Письменное сложение и вычитание в пределах первой тысячи.
2. Письменное умножение и деление в пределах первой тысячи.
3. Нумерация до миллиона.
4. Сложение и вычитание многозначных чисел.
5. Умножение и деление на однозначное число.
6. Умножение и деление на 10 и на круглые десятки.
7. Умножение на двузначное (примеры и вопросы).
8. Деление на двузначное (примеры и вопросы).
9. Задачи на умножение и деление.
10. Задачи на вычисление площади прямоугольника.
11. Задачи на четыре действия.
12. Простейшие дроби. Задачи на вычисление части числа.

Вот образец контрольной работы, состоящей из двух частей, для третьего класса. Тема — умножение и деление на однозначное число.

Примеры.

1) 1234 · 2	2) 13057 · 4	3) 3462 : 2	4) 90663 : 3
2307 · 3	26740 · 5	2692 : 4	45924 : 6
1280 · 6	57638 · 8	2620 : 5	71850 : 5
2476 · 7	174000 · 9	3256 : 8	56357 : 7

Задачи.

1) Для постройки привезли 2205 кирпичей на 9 подводах. Сколько всего штук кирпичей пойдет на постройку, если кирпич подвезут еще 8 таких подвод?

2) За 5 дней ткацкая фабрика выпустила 29 865 *м* ситцу и сатину. Ежедневно фабрика вырабатывает 3154 *м* ситцу. Сколько метров сатину вырабатывает ежедневно эта фабрика?

Как уже указывалось, в контрольные работы могут входить отдельные вопросы из курса арифметики, а также задания, связанные с измерением и черчением.

Приведем образцы таких заданий и вопросов:

1. Для первого года обучения:
Нарисуй квадрат, прямоугольник и треугольник.
Из каких монет можно составить 10 копеек?
2. Для второго года:
Увеличить 9 в 7 раз. Увеличить 9 на 7.
Во сколько раз 19 меньше 76? На сколько 19 меньше 76?
Начерти прямую линию длиною в 7 *см*. Начерти другую прямую на 5 *см* длиннее.
3. Для третьего года:
Напиши самое большое шестизначное число.
К какому числу надо прибавить 5075, чтобы получилось 11307?
Начерти прямоугольник длиною в 7 *см* и шириною в 4 *см*.
4. Для четвертого года:
Напиши число, в котором 23 миллиона 7 тысяч 25 единиц.
Как изменится разность, если вычитаемое увеличить на 85?
Начерти развертку куба, ребро которого 4 *см*.

Типичные ошибки. Проверяя контрольные работы, учитель должен отличать ошибки случайные и легко устранимые от ошибок типичных и стойких, с которыми трудно бороться. Рассмотрим по годам обучения некоторые интересные ошибки этого рода.

П о п е р в о м у г о д у, чаще всего приходится иметь дело с ошибками в вычислениях, которые происходят от слабого знания таблицы сложения и вычитания в пределах сначала первого, а затем второго десятка. Причину же слабого знания таблицы надо искать в торопливой проработке той или иной ее части и в недостатке внимания к соответствующим вычислительным приемам.

Во втором полугодии, при решении задач в два действия, ученики первого класса часто записывают только одно, последнее действие. Эта ошибка зависит от недостаточного формально-логического развития учащихся и свидетельствует о том, что еще рано давать детям такие задачи в качестве самостоятельной работы.

П о в т о р о м у году главное число ошибок в вычислениях падает на слабое знание таблицы умножения. В этом классе при решении сложных задач и примеров дети нередко усваивают дурную привычку „нанизывать“ действия, неправильно соединяя их знаком равенства, например: 35 + 27 = 62 – 8 = 54 : 6 = = 9. Ошибки этого рода приходится отнести за счет недостаточной математической грамотности самого учителя. На втором году появляется также опасность преждевременной механизации вычислений. Вот образцы ошибок, возникающих на этой почве: 80 : 20 = 40 или 14 × 5 = 25 (потому что 4 × 5 = 20 и 1 × 5 = 5, откуда 20 + 5 = 25). Эти ошибки свидетельствуют о слабой методической подготовке учителя, который слишком рано позволил учащимся вместо действий над числами производить операции над цифрами. Наконец, в этом же классе, при неумелом или преждевременном объединении двух видов деления в одно действие деления, дети ошибаются в выборе действия при решении задач.

Во втором классе, при решении сложных задач и примеров, которые допускают несколько способов решения, дети нередко обнаруживают недостаток сообразительности. Так, задачу, которую можно решить в 2 действия, они решают в 3 действия; такой пример, как 12 × 8 : 2, который сводится к умножению 12 на 4, они решают, как написано, т. е. умножают сначала 12 на 8, а затем делят 96 на 2 и т. п. Это конечно, не ошибка, но один из показателей индивидуальных особенностей ученика.

Н а т р е т ь е м г о д у, когда дети знакомятся с нумерацией и изучают механизмы действий, большинство ошибок возникает на почве автоматического применения правил раньше, чем сущность той или иной операции понята и сознательно усвоена. Перечислять все эти ошибки было бы слишком долго, тем более что возможность их появления предусматривается при изложении соответствующих отделов методики.

Здесь мы отметим только некоторые наиболее яркие проявления автоматичности и математической неграмотности, на которую многие учителя смотрят сквозь пальцы. Сюда относится бесцельная запись нулей в неполном произведении (автоматическое умножение на нуль), неправильная запись при раздроблении и превращении метрических мер, неправильная запись при вычислении площади прямоугольника и пр.

Вот образцы этих неправильных записей:

1)
```
   346
 × 207
  2422
  000
 692
 71622
```

2) 73 *м* × 100 = 7300 *см*
3) 8672 *см* : 100 = 86 *м* 72 *см*
4) 18 *м* × 5 *м* = 90 кв. *м*
5) 18 *м* × 5 = 90 кв. *м*

Следует же записывать эти действия и преобразования таким образом:

1)
```
  346
× 207
 2422
 000
692
71622
```

2) 100 *см* × 73 = 7300 *см* или короче: 73 *м* = 7300 *см*

3) 8672 *см* : 100 *см* = 86 (72 *см* в остатке) или короче: 8672 *см* = 86 *м* 72 *см*

4) 18 кв. *м* × 5 = 90 кв. *м*

Неумение решать задачи, которое часто проявляется с особенной очевидностью на третьем году обучения, является далеко не случайным. Оно объясняется тем, что на предшествующих ступенях обучения на эту сторону работы не было обращено внимания. При небольших числах дети кое-как справлялись с простенькими задачами в 2—3 действия, но учитель не подготовил их систематически к той формально-логической работе, которая связана с решением более сложных задач. Чтобы восполнить этот пробел, придется несколько вернуться назад и задачам с большими числами предпосылать задачи того же типа с небольшими числами, которые легко конкретизировать.

На четвертом году обучения встречаются, в общем, те же ошибки, что и на третьем году. К ним присоединяются ошибки в обыкновенных и десятичных дробях, которые зависят от недостатка образности в проработке дробей. Так, при сложении обыкновенных дробей, дети складывают числитель с числителем, и знаменатель со знаменателем, например, неправильно пишут $\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=\frac{7}{9}$; при умножении и делении десятичных дробей на 10 и на 100 не умеют обращаться с запятой и т. д. При вычислении объемов появляются те же неправильные записи, что и при вычислении площадей в третьем классе. Нередко дети смешивают квадратные и кубические меры, площадь с объемом и т. п. Все эти ошибки опять-таки говорят о том, что вместо конкретных образов учащиеся оперируют отвлеченными фразами, правилами, словами, в которые они не вкладывают никакого реального содержания. Сюда же относится неправильная запись наименований при решении задач, смешение множимого и множителя и т. д.

Исправление контрольных работ. При исправлении работ недостаточно подчеркнуть неправильное решение или ответ — следует тут же заменить их правильными. Чтобы ясно видно было все, что написано учителем, следует делать эти исправления красными чернилами. Только самые плохие работы, которые пришлось бы целиком писать заново, учитель не исправляет и не возвращает ученикам. В этих случаях приходится найти время после уроков и с такими слабыми учениками проделать заново всю контрольную работу, а затем некоторое время держать их под особым наблюдением, пока не будет ликвидирован обнаружившийся прорыв.

Исправленные работы учитель приносит в класс, раздает их ученикам и вместе с ними разбирает ошибки. Наиболее характерные из них учитель заносит в свою тетрадь с тем, чтобы еще не один раз к ним вернуться. Иногда бывает полезно через небольшой промежуток времени дать учащимся совершенно аналогичную работу, изменив лишь числа в задачах; и примерах. Это покажет и учителю, и ученикам, насколько они справились с очередными трудностями курса.

Четвертной и годовой учет. В четвертной контрольной работе невозможно охватить весь проработанный материал. Приходится ограничиться лишь узловыми вопросами. В конце четверти один или два урока отводятся на повторение пройденного. В остальном четвертная контрольная работа ничем не отличается от обычной контрольной работы. На нее отводится 2 часа: один час посвящается решению примеров, другой час — решению задач.

При отборе материала для годовой контрольной работы приходится быть еще более экономным и разборчивым, чтобы второстепенными вопросами не заслонить самого главного. Кроме письменной работы, делается еще устный опрос, для которого также должен быть заранее отобран и тщательно продуман материал. Годовому учету предшествует более или менее длительное повторение всего курса.

ЗАНЯТИЯ С ДВУМЯ КЛАССАМИ И САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ.

Общие замечания. В сельской начальной школе учителю приходится заниматься чаще всего с двумя классами, обыкновенно — либо с первым и третьим, либо со вторым и четвертым классами. Оба класса помещаются в одной и той же комнате. Занимаясь с одним из них, учитель дает другому самостоятельную работу. В связи с такой организацией учебных занятий возникают вопросы:

1. О распределении занятий учителя с классами.
2. О выборе материала для работы.
3. О задании и проверке работы и о наблюдении за детьми во время работы.

Распределение занятий учителя между классами. Сравним два способа распределения занятий учителя с классами: когда занятие с одним и тем же классом продолжается пол-урока и когда оно продолжается целый урок.

В начальной школе урок продолжается 45 минут, а пол-урока 22½ минуты. Задание самостоятельной работы и помощь ученикам, выполняющим самостоятельную работу, требует от учителя некоторого времени. Поэтому, если бы учитель распределил свое время между классами по пол-урока на класс, то

его занятие с одним классом фактически продолжалось бы менее 22½ минут. Разработку математического понятия или решение задач невозможно уложить в это время — тем более, что несколько минут в начале урока уходит всегда на введение учеников в круг понятий, подлежащих изучению, и полное напряжение в работе наступает не сразу после начала урока. Поэтому за два пол-урока с перерывом удается сделать по арифметике меньше, чем за один урок без перерыва. Все эти соображения говорят в пользу того, что занятие учителя с одним и тем же классом должно продолжаться целый урок.

Выбор материала для работы. Имея на руках два класса, учитель занимается с каждым классом только половину учебного времени. Другую часть времени ученики работают самостоятельно. В этих условиях выбор материала для самостоятельных работ и сама организация их имеют исключительно важное значение.

Содержание самостоятельной работы обусловливается целью, которой она должна служить; чаще всего самостоятельная работа дается для укрепления понятий, для выработки навыков и для тренировки.

Однако сводить работу к одной этой цели было бы неправильно. Самостоятельная работа может даваться для развития или завершения понятия. Так, проработав с учениками одни случаи какого-либо арифметического действия и притом важнейшие, можно предложить им другие случаи для самостоятельной работы, которая при этом служит как бы продолжением предшествующего ей урока.

Нередко самостоятельную работу дают для подготовки учеников к предстоящему уроку. Например, перед уроком письменного деления многозначного числа на однозначное предлагают ученикам решить ряд примеров устного деления на однозначное число. В этом случае самостоятельная работа составляет подготовительную ступень к следующему за ней уроку.

Подбирая упражнения для классной самостоятельной работы учеников, можно иметь в виду домашнюю их работу. В таком случае классная работа подготовляет учеников к домашнему заданию.

При разнообразии целей самостоятельной работы задачник не всегда может обеспечить учителя подходящим материалом, в особенности, когда эта работа должна быть методически связана с предыдущим или последующим уроками. Тут учителю приходится самому подбирать упражнения.

На первом году в первом полугодии самостоятельная работа заключается в письме цифр, черчении геометрических фигур по клеткам и в решении примеров. Во втором полугодии главное содержание самостоятельных работ составляют примеры, хотя в этом полугодии можно уже давать для самостоятельного решения и задачи — при условии, чтобы выбор действий для них не затруднял детей. Главное значение письменных самостоятельных

работ на первом году, в особенности в первом полугодии, заключается в приучении детей к правильному расположению записей, к порядку и чистоте в исполнении работы.

В следующих классах главное содержание самостоятельных работ составляет решение примеров и задач. Однако не следует упускать из виду геометрических работ — черчения фигур и измерения.

Задание и проверка самостоятельной работы. Примеры и задачи можно давать ученикам из книги. Задавая работу, учитель называет страницу задачника и номер задачи. Часто учителю приходится самому подбирать примеры и задачи. Тогда он пишет их на доске или, выписав предварительно на карточки, раздает эти карточки ученикам. В. Беллюстин в своей методике арифметики рекомендует следующий способ задания примеров. Примеры переписываются на листки, например, по пяти примеров на листке. Каждому ученику раздается по нескольку листков. Ученик, решивший группу примеров, выписанных на листке, складывает их ответы и пишет сумму. Затем переходит к следующему листку.

Сумма ответов для каждой группы примеров известна учителю, поэтому проверка работ совершается быстро. Если ответ у ученика верен, то учитель отмечает фамилию решившего, и ему даются новые листки.

Предлагая ученикам самостоятельную работу, надо удостовериться в том, что работа ими понята, в противном случае необходимо разъяснить те места ее, которые могут затруднить учеников.

В течение урока учитель несколько раз подходит к той части учащихся, которая занята самостоятельной работой, чтобы удостовериться в том, что работа идет гладко, без затруднений, и дает беглые указания тем ученикам, которые испытывают затруднения.

Когда работа выполнена, то она проверяется. На проверку самостоятельных работ надо обратить большое внимание, так как их цель будет достигаться только при надлежащей проверке. Способы проверки самостоятельных работ могут быть следующие:

1. Общая проверка в классе.
2. Проверка работы учителем на-дому.

Общая проверка производится так. Ученики по вызову учителя читают решение задач или примера, объясняют сделанные ими вычисления, а прочие товарищи следят за этим и, если надо, делают у себя исправления.

От времени до времени учитель отбирает тетради учеников и проверяет состояние записей и вычисления, обращая особенное внимание на повторяющиеся неправильности, которые могут перейти в привычку. Исправленные ошибки делаются предметом обсуждения в классе.

ПЕРВЫЙ ГОД ОБУЧЕНИЯ

ПЕРВЫЙ ДЕСЯТОК.

ЦЕЛЬ И СОДЕРЖАНИЕ КОНЦЕНТРА ПЕРВОГО ДЕСЯТКА.

Целесообразность выделения первого десятка в особый концентр. Напомним вкратце те особенности, которые присущи десятку, как основанию десятичной системы счисления:

1. Десятки, от одного десятка до 10 десятков, сотни, от одной сотни до 10 сотен, тысячи, от одной тысячи до 10 тысяч и т. д. считают совершенно так же, как простые единицы от одной единицы до 10 единиц. Таким образом, *счет до десяти* есть основа всего дальнейшего счета.

2. Производство действий над многозначными числами сводится к вычислениям, основанным на пользовании десятичным составом чисел и на знании таблиц арифметических действий. Эти таблицы надо помнить наизусть, так как в противном случае пришлось бы каждый раз добывать результаты действий заново путем присчитывания и отсчитывания по одному. В основе всех этих таблиц лежит *таблица сложения и вычитания в пределах 10*. Без твердого знания этой таблицы нельзя двигаться дальше, так как уже следующая ступень — сложение и вычитание в пределах 20 — опирается, с одной стороны, на уменье пользоваться десятичным составом чисел второго десятка и, с другой стороны, на знание всех сумм и разностей в пределах 10.

Вот почему, если мы хотим, чтобы учащиеся начальной школы овладели десятичной системой счисления и механизмами действий над многозначными числами, мы должны прежде всего позаботиться о том, чтобы они усвоили счет и действия в пределе 10. Отсюда — целесообразность выделения первого десятка в особый концентр.

Счет до десяти. Уметь считать до 10 это значит:

1. знать названия первых десяти чисел;
2. знать их последовательность (словесный числовой ряд);
3. уметь каждое слово этого ряда отнести к одному, и только одному, из элементов данной совокупности и, наконец,
4. понимать, что последнее произнесенное слово отвечает не только на вопрос „который“, но и на вопрос „сколько“ всего элементов в данной совокупности.

Счет не следует смешивать с вычислениями. Употребление таких выражений, как „обучение счету“ вместо „обучение арифметике“ или „счетные навы-

ки“ вместо „вычислительные навыки“ свидетельствует о том, что специальная терминология, которой мы пользуемся, не вполне установилась или недостаточно строго нами применяется. То же самое надо сказать о выражениях „прямой счет“ и „обратный счет“. Так называемый „обратный счет“ есть в сущности, не счет, а отсчитывание по одному, т. е. вычитание. Но поскольку не существует „обратного“ счета, не может быть речи и о „прямом“ счете. Оба эти эпитета применительно к понятию счет надо отбросить, как излишние. Можно произносить названия чисел в обратном порядке, но не следует называть это упражнение счетом.

Сложение и вычитание в пределах первого десятка. Вычислительные приемы. На основе счета происходит присчитывание и отсчитывание по одному, т. е. зарождаются *действия*. В дальнейшем навык *прибавления и отнимания по одному* выступает, как основной вычислительный прием сложения и вычитания, характерный для данного концентра. Но уже здесь, на основе этого элементарного приема, возникают более совершенные приемы *присчитывания и отсчитывания группами*. В тех же случаях, когда второе слагаемое больше первого, можно пользоваться *приемом перестановки* слагаемых.

При вычитании, кроме отсчитывания по одному и группами, можно воспользоваться связью между сложением и вычитанием, как действием, обратным сложению. Практически связь эта сводится к следующему: если я нашел, что $5 + 3 = 8$, то, не вычисляя, я могу сказать, что $8 - 3 = 5$. Условимся такие случаи сложения и вычитания называть *соответствующими*. Итак, *соответствующим* данному случаю сложения будет такой случай вычитания, в котором по сумме и *второму* слагаемому мы находим первое слагаемое. Соответствующими будут, например, следующие суммы и разности: $4 + 3$ и $7 - 3$; $8 + 2$ и $10 - 2$ и т. д. Само собой разумеется, что сумма $8 + 2$ и разность $8 - 2$ не могут считаться соответствующими: сумме $8 + 2$ можно противопоставить разность $10 - 2$, а разности $8 - 2$ сумму $6 + 2$.

Таблица сложения и вычитания. Совокупность всех сумм и разностей в пределах 10 составляет *таблицу* этих действий в первом концентре. Эти суммы и разности можно расположить в определенной последовательности, чтобы сделать их удобообозримее. При построении такой таблицы надо принять во внимание следующее:

1. Трудность сложения в пределах первого десятка зависит главным образом от *второго* слагаемого: чем больше второе слагаемое, тем дольше присчитывать его единицы по одной, тем сложнее процесс присчитывания группами. При вычитании ту же роль играет вычитаемое. Следовательно, таблицу этих действий следует строить по постоянному второму слагаемому и по постоянному вычитаемому.

2. При вычитании можно пользоваться специальными вычислительными приемами, но можно также опираться на связь между сложением и вычитанием, как действием, обратным сложению. Поэтому таблицу следует строить так, чтобы рядом с каждым случаем сложения помещался соответствующий случай вычитания.

В следующей таблице, если ее читать так: $1 + 1$, $2 - 1$, $2 + 1$, $3 - 1$, $3 + 1$, $4 - 1$ и т. д., все суммы и разности расположены по их возрастающей трудности и по взаимосвязи между прямым и обратным действием.

1 + 1	2 + 1	3 + 1	4 + 1	5 + 1	6 + 1	7 + 1	8 + 1	9 + 1
2 − 1	3 − 1	4 − 1	5 − 1	6 − 1	7 − 1	8 − 1	9 − 1	10 − 1
1 + 2	2 + 2	3 + 2	4 + 2	5 + 2	6 + 2	7 + 2	8 + 2	
3 − 2	4 − 2	5 − 2	6 − 2	7 − 2	8 − 2	9 − 2	10 − 2	
1 + 3	2 + 3	3 + 3	4 + 3	5 + 3	6 + 3	7 + 3		
4 − 3	5 − 3	6 − 3	7 − 3	8 − 3	9 − 3	10 − 3		
1 + 4	2 + 4	3 + 4	4 + 4	5 + 4	6 + 4			
5 − 4	6 − 4	7 − 4	8 − 4	9 − 4	10 − 4			
1 + 5	2 + 5	3 + 5	4 + 5	5 + 5				
6 − 5	7 − 5	8 − 5	9 − 5	10 − 5				
1 + 6	2 + 6	3 + 6	4 + 6					
7 − 6	8 − 6	9 − 6	10 − 6					
1 + 7	2 + 7	3 + 7						
8 − 7	9 − 7	10 − 7						
1 + 8	2 + 8							
9 − 8	10 − 8							
1 + 9								
10 − 9								

Состав чисел первого десятка. В виду той роли, которую таблица сложения и вычитания в пределах 10 играет при сложении и вычитании двузначных и многозначных чисел, необходимо владеть не только и не столько вычислительными приемами, сколько знать каждый из 90 табличных случаев наизусть.

Необходимо, чтобы все эти суммы и разности мы могли находить, не вычисляя, на основании следующего рассуждения: 5 да 3 будет 8, т. к. 8 состоит из пяти и трех, или от 7 отнять 3 будет 4, т. к. 7 состоит из трех и четырех и т. д. Чтобы иметь возможность рассуждать таким образом, надо *знать состав каждого числа первого десятка из двух слагаемых*. В таблице подобраны и соединены вместе аналогичные случаи сложения (и вычитания), например: $1 + 2$; $2 + 2$; $3 + 2$; $4 + 2$ и т. д. Но кроме такой группировки необ-

ходимо иметь в виду группировку другого рода. Среди других сумм в первом ряду таблицы мы встречаем сумму 6 + 1; в третьем ряду 5 + 2, в пятом ряду 4 + 3; в седьмом — 3 + 4; в девятом 2 + 5 и, наконец, в одиннадцатом 1 + 6. Все эти суммы полезно соединить в одну группу под названием: *„состав числа 7“*. По этому образцу можно представить состав любого из чисел первого десятка.

Зная состав каждого числа первого десятка из *двух* слагаемых, мы, тем самым, получаем возможность составлять эти числа из *всевозможного* числа слагаемых.

Так, если мы знаем, что 9 = 5 + 4, а также, что 5 = 3 + 2 и 4 = 2 + 2, то мы можем составить число 9 из четырех слагаемых: 9 = 3 + 2 + 2 + 2. Точно так же, если мы знаем, что 9 = 6 + 3, а 6 = 3 + 3, то нетрудно установить, что 9 = 3 + 3 + 3; или, если 6 = 4 + 2, а 4 = 2 + 2, то очевидно, что 6 = 2 + 2 + 2 и т. д. Другими словами, умея составить число из любых слагаемых, мы сумеем составить его, в частности, и из *равных* слагаемых.

Умножение и деление в пределах 10. В пределах первого десятка речь может идти, в сущности, только о двух действиях — о сложении и вычитании, и то до тех пор, пока мы не знаем наизусть таблиц этих действий. Знание наизусть состава чисел первого десятка из равных слагаемых делает применение специфических приемов умножения и деления в этом концентре излишним, тем более что и число случаев, к которым можно было бы их применить, крайне ограничено. Таким образом отпадает необходимость вводить новые понятия, терминологию и знаки действий, связанные с умножением и делением. С методической точки зрения это было бы тоже нецелесообразно, так как понятия умножения и деления и особенно выбор этих действий при решении задач представляют для начинающих огромную трудность. Вот почему знакомство с умножением и делением откладывается до времени изучения второго десятка.

Содержание концентра первого десятка. Итак, мы установили целесообразность выделения первого десятка в особый концентр и наметили в основных чертах содержание этого концентра:

1. Счет и запись чисел до 10.
2. Сложение и вычитание до 10.
3. Состав чисел первого десятка.

При этом должны быть усвоены следующие понятия и навыки:

1. Понятие сложения и вычитания.
2. Понятия (в зачаточной форме) основных свойств этих действий, на которые опираются их вычислительные приемы.
3. Понимание (интуитивное) связи между сложением и вычитанием.
4. Навыки счета, прибавления и отнимания.
5. Знание наизусть таблицы сложения и вычитания в пределах 10.

Метод изучения чисел и метод изучения действий на первых ступенях курса.

Постановка вопроса. Вопрос о работе по арифметике на первых ступенях курса, в частности, вопрос об изучении первого десятка является далеко не новым — у него большое прошлое, занимающее значительное место в истории методики арифметики. Тем не менее, до сих пор это один из неблагополучных участков в практике нашей школы. Отчасти это объясняется тем, что здесь на первый взгляд и изучать, собственно, нечего: пять да три будет восемь, шесть без двух будет четыре — это ясно без всякой методики. Так думают начинающие преподаватели, не имеющие методической подготовки. Более опытные попадают иногда в другую беду: не имея достаточно широкого методического кругозора, не разобравшись как следует в существующих разногласиях, они выбирают неправильный путь и делают ошибки более серьезного, принципиального характера.

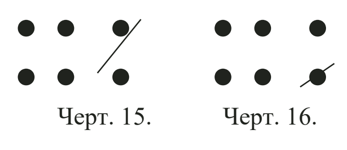
Если отбросить мелкие различия и оттенки в преподавании, происходящие чаще всего от недостаточной осведомленности или слабой методической подготовки, в нашей школе можно встретить два метода проработки первого десятка: метод изучения чисел или монографический метод и метод изучения действий, который можно иначе назвать вычислительным методом. Сначала мы не будем касаться их исторических корней и их психолого-педологического обоснования, а ограничимся описанием характерных особенностей каждого метода в том виде, как он применяется у нас в настоящее время. Затем мы познакомимся с историей возникновения этих методов и проследим их судьбу заграницей и у нас, а попутно дадим их оценку с методической и педологической точек зрения.

Монографический метод изучения первого десятка. Метод изучения чисел или монографический метод ставит целью *изучение каждого из чисел первого десятка в отдельности* (монос — один, графо — пишу, описываю). Изучение каждого числа строится по следующей схеме: 1) восприятие числа; 2) изучение состава числа и 3) сложение и вычитание в пределах данного числа.

Допустим для примера, что изучается *число 6.* Первый этап работы — *восприятие числа* — протекает следующим образом. Дети берут 5 каких-нибудь предметов, например, кружков, располагают эти кружки, как это им укажут, присоединяют к ним еще один кружок и вслед за учителем называют полученное число: 6 кружков. Затем они наблюдают 6 каких-либо других предметов, воспроизводят на бумаге число 6, рисуя 6 кружков, клеточек или крестиков, известным образом расположенных. Так усваивается образ группы, заключающей 6 предметов.

Дальше идет усвоение на, так называемой, числовой фигуре *состава числа 6* из пяти и одного, четырех и двух, трех и трех, двух и четырех, одного и пяти. Попутно дети

складывают и отнимают. Работа протекает примерно следующим образом: на числовой фигуре шести учитель отделяет карандашом один кружок. Сколько кружков налево? спрашивает он. Сколько кружков направо? Сколько всего кружков? Затем вопрос ставится немного иначе: к пяти кружкам прибавить один кружок, сколько получится? Подобным же образом прорабатывается и вычитание. Учитель спрашивает: сколько всего кружков на рисунке? После этого он зачеркивает один кружок: сколько кружков я зачеркнул? Сколько кружков осталось? В заключение ставится вопрос: от шести кружков отнять один кружок, сколько будет кружков? Таким же способом изучаются все остальные суммы и разности в пределах шести.



Черт. 15. Черт. 16.

Третий этап работы заключается в решении задачек и примеров на сложение и вычитание в пределах изученных числовых соотношений.

Кроме устных упражнений, попутно с ними, ведутся письменные упражнения. После упомянутого выше рисования числовой фигуры, дети учатся писать ту цифру, которой обозначается изучаемое число, и записывают все случаи сложения и вычитания, которые возможны в пределах данного числа.

Как мы видим, при изучении первого десятка по монографическому методу ученик добывает результаты сложения и вычитания простым созерцанием суммы или остатка, без какого-либо признака вычислений. Ученика, которого обучали по монографическому методу, бесполезно спрашивать, как он прибавлял четыре к двум, или как он отнял четыре от шести, — он не сумеет ответить на этот вопрос. На самом деле он мог выполнить эти действия только потому, что запомнил соединенный с числом 6 групповой образ, в частности, запомнил состав числовой фигуры шести из четырех кружков и двух кружков.

Вычислительный метод изучения первого десятка. Метод изучения действий или вычислительный метод ставит своею целью *развитие у учащихся вычислительных навыков*. По отношению к первому десятку работа строится следующим образом:

1. Прежде всего дети учатся *считать до 10*. При этом вырабатываются, очевидно, не те числовые образы, которые стремится создать монографический метод: числа должны представляться детям не в виде отчетливо-раздельных групп, а в виде ряда слов, произносимых в определенной последовательности. Так, „пять“ это слово, которое следует за четырьмя и предшествует шести.

2. Когда дети научились считать до 10, они учатся *прибавлять и отнимать по единице*. Все суммы и разности они получают на основе усвоенного ими ранее натурального ряда.

3. За прибавлением и отниманием по одному следует *прибавление и отнимание по два, по три* и т. д. Прибавляя два, мы прибавляем один и еще один.

Прибавляя три, например, к четырем, мы говорим вслух: четыре, про себя: пять, шесть и, наконец, снова вслух: семь и т. д. Таким образом и в этих случаях мы опираемся на натуральный ряд, по которому восходим, как по лестнице.

4. Вычисляя, дети постепенно усваивают наизусть все суммы и разности в пределе 10. Чтобы подытожить результаты этой работы, вводится повторительный отдел: суммы и разности объединяются в группы так, чтобы каждая группа представляла *состав* одного из чисел первого десятка. Напр., суммы $5+1$, $4+2$, $3+3$, $2+4$, и $1+5$ и соответствующие разности соединяются в группу, характеризующую состав числа шесть.

Все эти четыре этапа работы строятся на широком применении наглядных пособий и дидактического материала. В частности, применяются и, так называемые, числовые фигуры: дети считают, складывают и вычитают очки этих числовых фигур подобно тому, как они считали, прибавляли и отнимали палочки, квадратики, жолуди, орехи и другой искусственный или естественный счетный материал.

После того, как дети научатся прибавлять и отнимать на дидактическом материале, те же вычисления предлагаются им в форме задачек на сложение и вычитание, связанных как с непосредственным восприятием предметов в жизни и на картинке, так и с работой по представлению.

Знакомство с цифрой сопровождается пересчитыванием соответствующего числа предметов. При этом узнавание цифр предшествует их письму. Письмо цифр начинается позднее и протекает медленнее.

До тех пор, пока дети не научатся писать цифры и знаки действий, их заменяет разрезной дидактический материал.

Сопоставление монографического и вычислительного методов. Из всего сказанного легко видеть, какова разница между этими методами.

1. Метод изучения чисел или монографический метод вырабатывает у детей для первых числовых понятий групповые образы. Метод изучения действий стремится развить и упрочить у детей образ натурального числового ряда.

2. С точки зрения монографического метода основу арифметического действия составляет групповой образ. Так, чтобы сложить 4 и 3, ученик должен представить себе группы четырех, трех и семи предметов. Вычислительный метод рассматривает, как основу действий, счет или, что одно и то же, натуральный ряд. Чтобы прибавить три к четырем, ученик должен прибавить 3 единицы к четырем или одну за другой, или группами, т. е. произвести вычисления, опираясь на счет.

3. При монографическом методе наглядные пособия служат по преимуществу средством для иллюстрации состава чисел. Метод же изучения действий пользуется ими, как средством для пояснения вычислительных приемов.

4. Опорой памяти при усвоении таблиц арифметических действий по монографическому методу служат групповые образы: пока усвоение таблиц не примет чисто словесный характер, дети пользуются для припоминания групповыми образами. Опорой памяти при усвоении табличных результатов по методу изучения действий является образ числового ряда: припоминая сумму двух чисел в пределах десяти, ученик призывает на помощь привычный для него вычислительный прием, связанный с образом натурального числового ряда.

5. Уделив некоторое внимание счету в начале работы, при восприятии числа, монографический метод совершенно не пользуется им в дальнейшем, создавая вопреки теории и практике разрыв между счетом и действиями. Метод изучения действий не только не нарушает этой закономерной связи, но всячески ее укрепляет.

6. При монографическом методе дети сначала узнают состав числа, а затем решают примеры и задачи на сложение и вычитание. При методе изучения действий дети сначала учатся складывать и вычитать; после достаточного числа упражнений, они усваивают наизусть таблицы этих действий и состав чисел первого десятка.

Исторические сведения о методах изучения чисел и изучения действий.

Метод Грубе. Метод изучения чисел был основан немецким Педагогом А. В. Грубе и изложен в его книге: — Leitfaden fur das Rechnen in der Elementarschule nach den Grundsätzen einer heuristischen Methode, напечатанной в 1842 году. Основная мысль этого сочинения заключается в следующем: необходимо, чтобы каждое число первых двух разрядов, со всеми его свойствами и отношениями, ясно представлялось воображению ученика. Для этой цели, обучая детей арифметике первых двух разрядов, следует переходить не от действия к действию над всеми числами, а от числа к числу. Из всестороннего же рассмотрения отдельных чисел должны сами собою возникнуть основные арифметические действия.

Отчетливое наблюдение или изучение отдельных чисел состоит в том, что каждое число сравнивается с каждым из предыдущих и „измеряется“ им при помощи разностного и кратного отношения. На стр. 67 мы приводили пример изучения числа 6 по монографическому методу. Этот современный „метод изучения чисел“, хоть и находится в близком родстве с методом Грубе, все же не является его буквальным повторением. Если бы мы захотели провести *„изучение числа 6“* в точности „по Грубе“, пришлось бы прежде всего не применять числовых фигур, а воспользоваться палочками и раскладывать их по одной, по две, по три и т. д. Разложив палочки по одной, дети должны бы были ответить на следующие вопросы учителя: Из скольких палочек составилось наше число? Сосчитайте. Отсчитывайте по одной палочке. Сколько раз нужно взять по одной палочке, чтобы получить 6? Во сколько раз 6 больше одного? Какую часть шести составляет 1 палочка? Сколько раз 1 палочка заключается в шести? и т. д.

Потом пришлось бы сравнивать число 6 с двойкой и, разложив 6 палочек по 2, отвечать на вопросы: Сколько двоек в шести? Сколько раз нужно взять по 2 палочки, чтобы получить 6? Сколько раз можно отнять по 2 от шести? Значит, сколько раз 2 содержится в шести? и т. д.

После каждой группы таких упражнений пришлось бы записать действия в виде таблички. Получились бы следующие записи:

1)
$$\begin{aligned} 1+1+1+1+1+1&=6\\ 1\times 6&=6\\ 6-1-1-1-1-1-1&=0\\ 6:1&=6 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} 2+2+2&=6\\ 2\times 3&=6\\ 6-2-2-2&=0\\ 6:2&=3 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} 3+3&=6\\ 3\times 2&=6\\ 6-3-3&=0\\ 6:3&=2 \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} 4+2&=6\\ 4\times 1+2&=6\\ 6-4&=2\\ 6:4&=1\ (2) \end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned} 5+1&=6\\ 5\times 1+1&=6\\ 6-5&=1\\ 6:5&=1\ (1) \end{aligned}$$

Результаты каждой таблицы должны быть усвоены наизусть, чтобы в пределах изученных чисел производить, не вычисляя, все арифметические действия. Такова конечная цель изучения чисел по методу Грубе. Учебный материал в пределах первой сотни располагается не по действиям, а по числам. Все четыре действия вводятся сразу, без подразделения на более легкие и более трудные. Обратные действия выступают с первых же шагов в форме разностного и кратного сравнения, — задается даже вопрос, какую часть одного числа составляет другое. И вместе с тем обращается очень мало внимания на вычислительные приемы, основанные на применении законов арифметических действий и на уменье пользоваться десятичным составом числа.

Метод Грубе получил широкое распространение в Европе и Америке. В России его популяризировал И. Паульсон (его „Арифметика по способу Грубе“ впервые напечатана в „Журнале для воспитания“ в 1859–66 г.г.) и В.Евтушевский („Методика арифметики“ изд. 1872 г. и задачники). Книги Евтушевского сделали метод Грубе в России чрезвычайно популярным. Однако уже в 70-х годах стали появляться сильные противники этого метода. В 1874 году против него высказался Л. Толстой (в журнале „Отечественные записки“). „В этих немецких приемах“, — писал он — „была та большая выгода для учителей, что при них учителю не нужно работать над собою и приемами обучения. Большую часть времени по этому методу учитель учит тому, что дети знают, да, кроме того, учит по руководству, и ему легко“. В 1876 году в „Учебно-воспитательной библиотеке“ была напечатана статья А.И.Гольденберга, посвященная подробному разбору „Методики“ Евтушевского, а позднее, в 1880 году, в газете „Русские Ведомости“ — его же статья „Немецкие измышления в русской школе“. Кропотливость и мелочность метода Грубе вызвали резкое осуждение его и со стороны С.А.Рачинского (сборники статей „Сельская школа“ 1884 года). „Прием этот — пишет он — быть может необходимый, когда приступаешь к делу с пятилетними детьми (или с идиотами), отзывает чрезвычайной искусственностью, когда имеешь дело с детьми вдвое старшими... Нужно избегать слишком долгого пережевывания уже известного ученикам: оно порождает скуку, отучает их от необходимых умственных усилий“.

Недовольство методом Грубе—Евтушевского наростало, и в 80-х и 90-х годах оно сказалось в появлении целого ряда методических сочинений и задачников (Гольденберга, Шохор-Троцкого, Егорова, Вишневского, Арженикова, Беллюстина) противоположного направления, которое стало именоваться *методом изучения действий*.

Недостатки метода Грубе. В чем же заключаются основные недостатки метода Грубе? Вот что говорит по этому поводу К.П. Аржеников, автор известной методики начальной арифметики и целого ряда задачников для начальной школы:

„Изучение чисел состоит в усвоении разложения каждого числа на все числа, ему предшествующие; в пределах сотни таких разложений очень много — свыше пяти тысяч, и одна память усвоить их не в состоянии. На помощь памяти Грубе... призывает „непосредственное созерцание“ или „осязательное понимание“ чисел, т. е. способность наглядно представлять, как группу единиц, каждое число, не превышающее сотню. Но наблюдения и опыты психологии показали, что такой способности не существует: мы можем наглядно представить себе лишь очень небольшие группы предметов — группы двух, трех и, самое большее, четырех предметов. Если же мы встречаемся с группой, заключающей в себе больше четырех предметов, то для определения ее величины мы должны произвести счет... Таким образом изучение всех чисел первой сотни психологически невозможно, как основанное на несуществующей способности наглядного представления таких чисел“. (Аржеников. — Методика начальной арифметики. Изд. 23, стр. 19—20).

Итак, главная мысль Грубе — основать разнообразные числовые комбинации в арифметических действиях на наглядных числовых образах — едва ли осуществима вполне даже для чисел первого десятка, так как числа от 5 до 10 с трудом могут быть усвоены в виде отчетливых групповых образов; о больших числах и говорить в этом смысле не приходится.

Исходя из ошибочных предпосылок о возможности „непосредственного созерцания“ или „осязательного понимания“ чисел, Грубе не уделял должного внимания знакомству учащихся с техникой вычислений. В пределах первого десятка им не отводилось никакого места, в пределах второго десятка и сотни их роль была весьма ограничена. Не умея находить числовые результаты действий путем вычислений, ученики вынуждены были усваивать их памятью механически. Что же касается результатов почему-либо забытых, то детям, очевидно, приходилось восстанавливать их инструментальным способом, если считать, что этот первобытный прием был им все-таки так или иначе известен. Таким образом, метод Грубе не достигал той *цели*, которую, по словам Гольденберга, „должно преследовать обучение детей счислению и которая заключается в том, чтобы дети *умели вычислять и понимали вычисления*“. (Гольденберг. — Методика начальной арифметики, изд. 1913 г., стр. IV).

Техника вычислений над целыми числами основана, с одной стороны, на применении, так называемых, законов арифметических действий, с другой стороны, на умении пользоваться десятичным составом чисел. Вычисляя, дети практически знакомятся с этими важнейшими математическими понятиями, постепенно овладевают ими. Пренебрегая вычислениями, отодвигая их на задний план, Грубе тормозит образование основных понятий арифметических действий, снижает общеобразовательное значение изучения арифметики в начальной школе.

Необходимо также отметить, что Грубе вводит сразу все четыре действия, вовсе не заботясь о том, чтобы смысл каждого действия был достаточно ясен учащимся. С самого начала он ставит перед учащимися такие трудные вопросы, как вопросы разностного и кратного сравнения. Ничего, кроме сбивчивости понятий, от такого преподавания ждать не приходится. А плохое понимание и усвоение начатков арифметики при крайнем однообразии и скуке методических приемов может надолго отбить у учащихся охоту заниматься этим предметом.

Если при всех своих недостатках метод Грубе удержался в Европе и Америке до нашего времени, то это объясняется следующими причинами: 1. На практике

применение метода Грубе не шло дальше второго или даже первого десятка. Если в отдельных случаях и встречается более широкое его применение, то изучаются все-таки не все, а только наиболее богатые множителями числа первой сотни. Вместе с тем уделяется должное внимание и вычислительным приемам. 2. В связи с новыми течениями в области методики начальной арифметики не только сужена область чисел, к которым применяется метод Грубе, но в самый метод внесены значительные изменения и поправки. Наконец, 3. В Европе и Америке обучение начинается в 6 лет и раньше, когда числовые понятия у детей связываются с групповыми образами, когда вообще возможности усвоения арифметических знаний у детей еще весьма ограничены, и медленные темпы, присущие методу изучения чисел, вполне уместны.

Метод Гольденберга. В условиях русской школы недостатки метода Грубе сказались особенно сильно прежде всего потому, что в русскую школу того времени, к которому относятся выступления Л. Толстого и Рачинского, поступали дети 10 лет и старше. У таких детей, несомненно, должны преобладать вычислительные интересы над интересами созерцательными, более свойственными младшему возрасту. С ребятами, которые, по словам Рачинского, уже считают до 100, уже имеют практическое понятие о десятичной системе благодаря известному им счету на копейки, гривенники и рубли, было по меньшей мере странно изучать монографическим методом первый десяток. Вот почему, не говоря уже о других слабых сторонах метода Грубе, идеи Гольденберга и других противников метода изучения чисел так быстро завоевали себе всеобщее признание и симпатии.

„Обучение детей счислению имеет целью научить их производить сознательно действия над числами и развить в детях навык прилагать эти действия к решению задач общежитейского содержания“ — так определяет Гольденберг задачи обучения арифметике в начальной школе в предисловии к своей „Методике начальной арифметики“, вышедшей в 1885 году. Обучая детей арифметике, мы должны добиваться того, „чтобы дети *умели* вычислять и *понимали* вычисления“, говорит он дальше. В этих двух требованиях — „уметь вычислять и понимать вычисления“ — и заключается сущность разработанного Гольденбергом метода — метода изучения действий.

„Техника вычислений над целыми числами основана, с одной стороны, на элементарнейших свойствах чисел и, с другой стороны, на пользовании искусственной группировкой их единиц, согласно общепринятому десятичному счислению“, говорит Гольденберг (Предисловие, стр. VI). Таким образом, цель обучения арифметике, по мысли Гольденберга, будет достигнута, если, исходя из ясного *понимания* свойств действий и основ десятичного счисления, дети достигнут определенной вычислительной техники. Соединение уменья с пониманием важно и с общеобразовательной, и с практической точки зрения. В самом деле, прочные *навыки* могут возникнуть только на основе отчетливых, хорошо усвоенных *понятий*. Правила, усвоенные механически, несмотря на многократные упражнения, быстро забываются и не гарантируют учащихся от наступления вскоре после окончания школы, так называемого, рецидива неграмотности.

Обучение арифметике Гольденберг располагает по десятичным концентрам. В пределах каждого концентра, не исключая и концентра десяти, изучаются не отдельные числа, а *счет и действия*, точнее „общеупотребительные, сокращенные способы производства действий“ (стр. IX). Разумеется, Гольденберг не защищает того формализма действий, который господствовал в старой школе. Его метод основан прежде всего на широком применении устных вычислений, роль которых в начальном курсе арифметики разъясняется ниже (стр. 221). Лишь начиная с третьего года обучения он постепенно знакомит детей с письменными механизмами арифметических действий.

Метод изучения действий, как уже указывалось, довольно быстро вытеснил и заменил собою метод Грубе-Евтушевского. Широкое распространение после Методики Гольденберга получила составленная в том же духе „Методика начальной арифметики“ К. П. Арженикова. В 1917 году она вышла 23 изданием. Некоторые главы ее до сих пор не утратили своего значения. Пользовались большим успехом и задачники того же автора.

После Гольденберга метод изучения чисел лет 30 не имел в России ни одного литературного защитника. Однако, в 1914 г. метод Грубе в обработке д-ра Лая, правда, только лишь для концентра первого десятка, был привлечен вновь Д. Л. Волковским в его задачнике „Детский мир в числах“ и методическом руководстве к нему. Стали появляться и другие учебные пособия, в которых материал первого десятка располагался не по действиям, а по числам. Годится ли этот „неогрубеизм“ для советской школы, в которую поступают дети семи-восьмилетнего возраста? Заслуживает ли он внимания для дошкольных групп и учреждений? Вот вопросы, которые остается разрешить. Но для этого надо прежде всего познакомиться с методом Лая или, как его иначе называют, методом числовых фигур.

Метод числовых фигур. Результаты экспериментально-дидактических опытов д-ра Лая и вытекающий из них метод преподавания начатков арифметики изложены в его книге „Руководство к первоначальному обучению арифметике“ (перевод под ред. Д. Л. Волковского), вышедшей в 1897 году. Обучение арифметике в пределах сотни по Лаю основано целиком на его числовых фигурах.

Числовые фигуры применялись немецкими педагогами с давних пор. Впервые они были применены на практике в 1797 году, т. е. за 100 лет до Лая. Грубе не придавал значения числовым фигурам. Наоборот, наиболее целесообразным пособием он считал пальцы, черточки, палочки, т. е. как раз не фигуры, а ряды. Вообще, до Лая фигуры большой роли не играли.

Под *числовой фигурой* подразумевают группу предметов (шариков, кружков, квадратиков), служащую для образования наглядных числовых представлений. Вот изображения некоторых таких фигур:



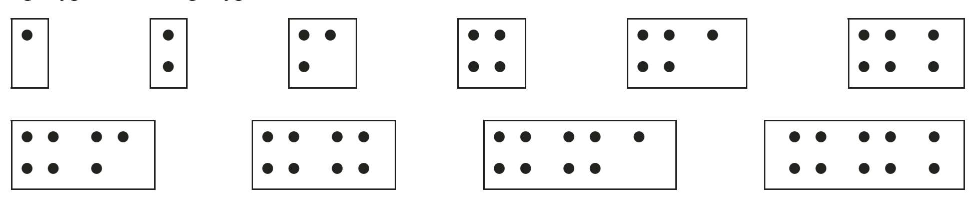
Черт. 16. Фигуры Макиндер.

Черт. 17. Фигуры Буссе.

Черт. 18. Фигуры Борна.

Любопытно сопоставить между собою эти фигуры. Самые старые из них — фигуры Буссе. Это те фигуры, которые были применены впервые в 1797 году. В них

все числа первого десятка составлены либо из пар, либо из троек с очевидным расчетом дать наиболее характерное разложение каждого числа. Самые молодые — это фигуры английского педагога miss Makinder, о которых мы знаем из книги Штейнгауз, вышедшей в 1925 году. Здесь последовательно выдержан принцип построения всех фигур из троек. Фигуры Борна, которые послужили прототипом фигурам Лая, основаны на *группе двух*, но эта группа выступает недостаточно отчетливо. Так называемые, *квадратные фигуры Лая* дают построение всех чисел из пар, соединенных по две, так что образы *двойки* и *четверки*, наиболее легкие для непосредственного восприятия, когда ясен состав четверки из пар, участвуют в образовании всех его фигур. Вот эти фигуры:



Черт. 19.

Данные психологии, согласно которым наша способность наглядного представления групп предметов не идет дальше группы в 4—5 предметов, в корне подорвали метод Грубе. Д-р Лай, при помощи своих числовых фигур, пытается искусственно расширить пределы этой способности. Мало того, он полагает, что при помощи числовых фигур можно складывать и вычитать, т. е. не только постигать число, но и производить действия над числами. Сложить 5 и 3 с точки зрения Лая — это значит представить себе фигуру пяти, затем фигуру трех, мысленно составить из них новую фигуру, равную сумме этих чисел, и в ней узнать число 8. Необходимо добавить, что Лай пользуется только одним видом числовых фигур — вышеуказанными квадратными фигурами.

Приемы изучения числа *шесть* на соответствующей числовой фигуре, описанные нами на стр. 67, заимствованы у Лая. Аналогичными приемами изучаются по Лаю и остальные числа первого десятка. Числа второго десятка и первой сотни изучаются также при помощи квадратных числовых фигур; но уже восприятие числа, с которого начинается процесс изучения, строится с учетом десятичной группировки единиц: числовая фигура является в данном случае средством пояснения состава числа из десятков и единиц. Далее внимание направляется на выработку вычислительных приемов. Так, при изучении числа 13 дети усваивают при помощи числовой фигуры не только образ числа 13, составленный из 8 и 5, из 7 и 6 и т. п., но и прием вычисления: (8 + 2) + 3 или (7 + 3) + 3 и т. д.

Несмотря на то, что при обучении действиям в пределе двух десятков и сотни, уже довольно отчетливо выступают вычислительные приемы, характерные для каждого действия, учебный материал располагается не по действиям, а по числам натурального ряда.

Недостатки метода числовых фигур. Если обратимся теперь к оценке метода Лая, то увидим, что к нему можно отнести почти все те упреки, которые были сделаны нами по отношению к методу Грубе. Правда, некоторые наиболее резкие углы сглажены. Применение числовых фигур, особенно в пределах первого десятка, облегчило восприятие чисел и усвоение их состава. Но *сущность* метода осталась без изменения. Вот основные положения критики метода числовых фигур:

1. Как бы ни облегчало целесообразное размещение кружков в числовой фигуре восприятие их числа, все же для определения численности группы, заключающей в себе более четырех элементов, приходится прибегать к *счету*. Невольно впадая в противоречие с самим собой, Лай сам рекомендует начинать изучение каждой фигуры все-таки именно со счета. В результате мы будем иметь не *представление* числа, а *понятие* о числе, выраженное словом (например, словом „семь“) и знаком (например, цифрою 7).

2. После достаточного количества упражнений у детей действительно создается навык узнавания фигур, но в это время мы уже имеем дело не с групповым восприятием, а с восприятием геометрической формы, заменяющей цифру. Тем самым теряется смысл применения числовых фигур.

3. Изучая числа по методу Лая, ученик ассоциирует представление числа с *определенной* числовой фигурой. При этих условиях всякое изменение в расположении элементов числовой фигуры или естественной группы уже само по себе может затруднить определение ее численности. „Учитель спрашивает, как выглядит 3. Кто-либо из способных учеников отвечает, что 3 выглядит так: вверху 2, внизу 1 (числовая фигура). Но, спросим мы теперь, что же будет, если наш способный ученик увидит вечером созвездие, имеющее форму ⁂ и заключающее 3 звезды? Должен ли он думать, что это не 3 или что учитель не умеет считать до трех?“ (Рассуждения по поводу числовых фигур Лая швейцарского педагога И. Штеклина.)

4. Выполнение действий при помощи числовых фигур так, как это мыслит себе Лай, крайне громоздко. Допустим, что надо найти сумму двух чисел в пределах 10. Если иногда, например, для чисел 4 и 3, операция суммирования образов и осуществима, то в большинстве случаев она может оказаться непреодолимо трудной: придется „перестраивать“ фигуры, которые ученик привык считать незыблемыми. Ниже показан прием сложения фигур пяти и трех.



Черт. 20.

5. Пользуясь фигурами, дети вовсе не усваивают вычислительных приемов сложения и вычитания в пределах первого десятка. Поэтому для них не существует аналогии между такими случаями сложения, как 2 + 2, 3 + 2, 6 + 2, 7 + 2 и т. д. Каждый такой случай — новая операция, требующая нового напряжения внимания и памяти.

6. Единственной опорой для усвоения наизусть таблиц сложения и вычитания в пределах 10 является механическая память: забыв фигуру, ребенок бессилен найти результат действия путем вычислений, так как он не умеет, не учился вычислять.

7. Что касается изучения чисел в пределах первой сотни, то поскольку сам Лай все-таки занимается в этом концентре изучением вычислительных приемов, принятое им расположение всей учебной работы по числам становится явно нецелесообразным. Ведь нечего и говорить, что вычислительные приемы лучше усваиваются в том случае, когда учитель не стремится подогнать упражнения к одному числу, а пользуется любыми числами в пределах данного концентра, выбирая из них те, на которых легче всего усматриваются интересующие нас числовые закономерности.

Выводы. Анализ метода Грубе и возникшего на его основе метода Лая показывает, что во всех отношениях эти методы стоят ниже, чем метод изучения действий. Недостатки метода изучения чисел и с теоретической и с практической точки зрения достаточно серьезны.

Данные педолого-психологических наблюдений над детьми свидетельствуют о том, что образование первоначальных числовых представлений в пределах пяти заканчивается, примерно, на 5-м году жизни. Дальнейшее развитие понятия о числе

в естественном порядке совершается двумя-тремя годами позднее уже на основе счета. Казалось бы, что раннее начало обучения арифметике в американской школе должно особенно благоприятствовать успешности применения метода Грубе. Однако, даже и в Америке видные педагоги высказываются против него весьма решительно: „Дети с большим интересом пересчитывают близкие им предметы, считая их по одному, парами, пятками, десятками, считают деньги, измеряют расстояния. Поэтому, счет и измерение — более верный путь к числу, чем продолжительное изучение одного и того же числа, проведенное на одних и тех же предметах“ (Мак Леллан и Дьюи).[1] „Изучение каждого числа по методу Грубе совершается с помощью всех четырех действий. Между тем, понятие об умножении и делении даже в области малых чисел представляет большие трудности сравнительно с понятиями сложения и вычитания“ (Мак-Мурри).[2] „Более скучного пути к числу, чем путь, указанный Грубе, трудно найти“, восклицает Д. Е. Смит.[3] Против метода числовых фигур — новейшего видоизменения метода Грубе — решительно высказывается и Н. А. Менчинская („Развитие арифметических операций у детей школьного возраста“, стр. 74).

Можно ли и следует ли, вопреки естественному пути развития первоначальных числовых представлений, идти по искусственному пути метода изучения чисел? С нашей точки зрения этого не следует делать ни на первом году обучения в школе, ни раньше, в дошкольных учреждениях. С детьми моложе 5 лет, числовые представления которых возникают на основе групповых восприятий, вообще еще не может быть речи о каких-либо планомерных занятиях арифметикой. С детьми 6—7-легнего возраста целесообразно укреплять приобретаемые ими в естественном порядке групповые образы первых пяти чисел и навыки счета до 10. С детьми, поступающими в первую группу, и подавно следует придерживаться более соответствующего их возрасту и более ценного с научной точки зрения метода изучения действий.

Изучение первых пяти чисел.

Общие замечания. Изучением первых пяти чисел начинается работа по арифметике с неграмотным первым классом. Правильнее было бы назвать эту главу курса повторением и приведением в систему первоначальных числовых представлений в пределах первого пятка, с которыми дети приходят в школу. Этот небольшой вводный отдел дает возможность учителю познакомиться с классом, выяснить уровень его математического развития, пополнить отдельные случайные пробелы и подвести учащихся к изучению счета и действий в пределах первого десятка.

Работа в пределах первого пятка состоит из следующих частей: 1) восприятие чисел 1—5 и повторение их состава; 2) сложение и вычитание в пределах каждого числа с применением условной фразеологии — прибавить, отнять, получится; 3) счет и узнавание цифр до 5 и знаков +, − и =; 4) письмо цифр 1 и 2.

[1] Mc Lellan and Dewey. — The Psychology of Number. D. Appleton and Co.
[2] C. A. Mc Murry. — Special Method in Arithmetic. The Mac-Millan and Co.
[3] D. E. Smith. — The Teaching of Elementary Mathematics. The Mac-Millan and Co.

Наряду с этой работой по арифметике вводятся и некоторые элементы геометрии: 1) расположение предметов в пространстве: слева, справа; позади, впереди; сверху, снизу; посередине; 2) сравнение величин: больше, меньше; длиннее, короче; шире, уже; выше, ниже; ближе, дальше; легче, тяжелее и т. д.; 3) узнавание и называние геометрических фигур: круга, квадрата, прямоугольника и треугольника. Весь этот материал не выделяется в самостоятельную главу, а вводится попутно на уроках арифметики.

В пределах первого пятка и только в этих пределах уместно применение монографического метода, поскольку числовые представления первых пяти чисел, возникшие в раннем детстве, имеют групповой характер: числа еще не представляются ребенку отдельно от предметных совокупностей. Воображая группу трех предметов, например, трех мячиков, ребенок представляет и состав ее: два мячика и один мячик, или один мячик и два, или один, один и один мячик.

Имея такие числовые образы, ребенок еще до поступления в школу умеет отвечать на вопросы в роде следующего: На дворе играют два мальчика и две девочки. Сколько детей играет? Решая этот вопрос, ребенок не вычисляет, а просто пользуется уже имеющимся у него образом числа четыре, знанием его состава. Сказать, что надо прибавить два к двум, он еще не умеет, так как не знаком с формальной арифметической фразеологией. Этому как раз он и должен научиться во время проработки первого пятка.

Много, один. Первые 1—2 урока можно посвятить выяснению понятий „много“ и „один“. Много детей и один учитель, много столов и стульев и один шкаф и т. п. — вот те противоположения, которые могут служить отправной точкой в работе. В задачнике на первой странице дети видят много гвоздей и один молоток, один *большой* дом и много *маленьких*. По заданию учителя они рисуют один большой *кружок* и много маленьких, или один синий кружок и много красных. Затем они рассматривают в задачнике цифру 1, находят ее в табель-календаре, в книге, среди разрезных цифр. Вырезывают ее из отрывного календаря и наклеивают в тетради. Рядом изображают одну палочку, один кружок. На той же странице рисуют один дом, одно яблоко, один флажок. Заканчивается работа коллективным составлением картин — аппликаций: „Один большой дом — много маленьких“ или „один паровоз и много вагонов“, а также составлением плаката с осенними листьями, которые должны быть расположены по величине, начиная с самого большого и кончая самым маленьким.

Число два. Дети наблюдают естественные группы из двух предметов: два глаза, два уха, две руки, две ноги, „два сапога — пара“ и т. д. В задачнике они находят на картинке двух рабочих, двух пильщиков, два бревна.

Сравнивают бревна на рисунке и в действительности — *длинное и короткое*, *толстое и тонкое*. Сравнивают доски по *длине* и *ширине*. Вырезывают из бумаги ряд полосок одинаковой ширины, но разной длины или одинаковой длины, но разной ширины и наклеивают их в тетради или же приготовляют стенной плакат. По образцу знакомства с единицей, знакомятся с цифрой 2. Дальше выясняется состав числа: один да один — два, два без одного — один. При этом дети впервые учатся употреблять выражения: прибавить, отнять, получится. Работа ведется следующим образом.

Учитель откладывает на классных счетах один шарик. Дети кладут перед собой один кружок. К одному шарику учитель медленно подвигает еще один шарик. Дети придвигают к одному кружку еще один кружок. Слово „придвинуть" учитель заменяет словом „прибавить": к одному шарику я придвинул, *прибавил* еще один шарик. Учащиеся повторяют ту же фразу по отношению к кружкам. Затем учитель ставит наводящий вопрос: к одному прибавить один — сколько получится? Дети отвечают полным ответом: *к одному прибавить один, получится два*.

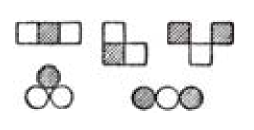
Фразу эту дети записывают при помощи разрезных цифр. Работа ведется примерно так. Учитель вывешивает (или пишет) на доске цифры 1, 1 и 2, оставляя между ними небольшие расстояния. По вызову учителя дети раздельно повторяют: к одному — прибавить — один — получится — два, делая между словами паузы. Учитель просит показать, где записано: к одному. Дети показывают. А где надо записать: прибавить? Кто-нибудь из учащихся догадывается, что *прибавить* надо записать тотчас после *к одному*. Учитель достает еще неизвестный детям знак сложения и прикрепляет его к доске между двумя единицами. Что теперь записано? Прочитайте, предлагает он. Таким же способом вводится знак равенства, который дети читают, как *получится*.

После этого дети складывают тот же пример из мелких разрезных цифр и знаков действия у себя на столе.

По образцу сложения прорабатывается обратная операция, которая заканчивается построением фразы: от *двух отнять один, получится один*. Как и в случае прибавления, необходимо применять разнообразный дидактический материал, так как это оживляет преподавание и, что также очень важно, содействует образованию отвлеченных понятий о числе и действии над числами.

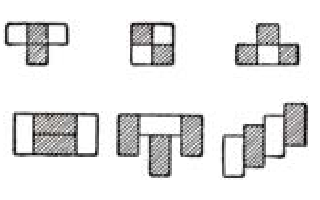
После проработки выражений *прибавить* и *получится* на наглядных пособиях, дети решают задачи по картинке в книге и по картинам, которые вывешиваются перед ними на классной доске. То же относится и к выражению: *отнять*. Задачки решаются устно и на разрезных цифрах. Подробнее о решении задач см. на стр. 146.

Число три. По образцу числа два изучается и число три. Перед детьми выставляется группа предметов: три кубика или квадрата в виде числовой фигуры, или три кленовых листа, три флажка. Дети сосчитывают предметы в группе, срисовывают их или составляют группу из разрезных фигурок — кружков или квадратиков, которые они обводят карандашом и раскрашивают.



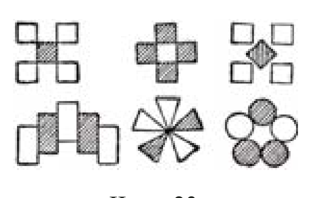
Черт. 21.

При проработке числа три уместно ввести *треугольник*, составлять его из палочек или спичек. В задачнике дети рассматривают группу из трех кроликов: два поменьше, один побольше; один *посередине*, два по бокам и т. д. Дальше речь идет о морковках: две *направо*, одна *налево*; одна с листьями, две без листьев. Дети рисуют 2 толстых морковки и 1 тонкую или отдельно 3 тонких и 3 толстых. Развивая таким образом свои пространственные представления, упражняясь в сравнении величин, дети изучают вместе с тем состав числа три. Затем они знакомятся с цифрой 3 по указанному выше плану. Работа заканчивается решением задач по картинкам устно и на разрезных цифрах.



Черт. 22.

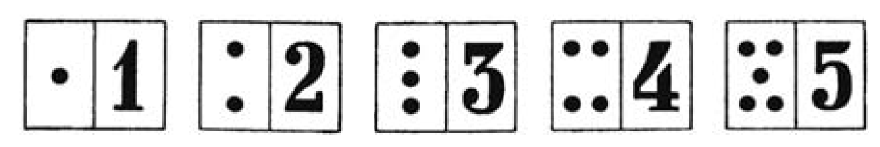
Число четыре. Как и в предыдущих случаях, сначала дети наблюдают в действительности или на рисунке естественные группы: четыре ноги у животных, четыре ножки у стола, табуретки, четыре колеса у телеги, у автомобиля и т. д. При этом можно различать передние и задние ноги у животных, передние и задние колеса у повозки и т. д. Из 4 спичек дети складывают *квадрат*; из четырех палочек — двух длинных и двух коротких — *прямоугольник*. Составляют и рисуют числовые фигуры из квадратиков и прямоугольников. Раскрашивают их цветными карандашами. Попутно идет проработка состава числа и знакомство с цифрой 4, а затем дети решают устно и на разрезных цифрах задачи на всевозможные комбинации в пределах числа 4, а именно: $3 + 1$, $4 - 1$; $2 + 2$, $4 - 2$; $1 + 3$, $4 - 3$.



Черт. 23.

Число пять. Изучая это число по тому же плану, можно, между прочим, нарисовать по шаблону и раскрасить пятиконечную звезду. Можно вырезать ее и укрепить на стене. Затем сделать гирлянду из 5 флажков и повесить их *внизу*, под звездой, или *наверху*, над звездой. При рисовании числовых фигур можно пользоваться квадратиками, прямоугольниками, треугольниками и кругами. За изучением состава числа следует, как всегда, знакомство с цифрой и решение задач по картинкам в книге.

Проработку пятка можно закончить *счетом*. Дети раскладывают разрезные цифры по порядку или не по порядку, а под цифрами откладывают соответствующее число спичек или палочек. Коллективно можно выполнить еще и такую работу: вырезать по шаблону кружки из глянцевой бумаги, наклеить их на картонные прямоугольники в виде числовых фигур, рядом с каждой фигурой наклеить цифру из отрывного календаря и повесить эти таблицы на стене в классе.



Черт. 25.

Наглядные пособия. Необходимо подчеркнуть большое значение при проработке первого пятка, а затем и десятка всевозможных *наглядных пособий и дидактического материала*. Следует заблаговременно заготовить его в нужном количестве. Кое-что могут сделать в этом отношении и сами дети. Во время осенних прогулок они собирают листья, жолуди, орехи, шишки, вишневые косточки, семена тыквы, камушки, раковинки и т. п. Полезно, чтобы каждый ученик имел коробочку или мешочек с набором счетного материала, которым он может по мере надобности пользоваться во время занятий. Учитель, с своей стороны, должен заготовить следующие пособия:

1. Разрезные цифры и знаки действий.

2. Палочки или спички без головок, которые полезно окрасить: часть, например, в красный цвет, остальную часть в зеленый.

3. Двухцветные квадратики и кружки, а если возможно, то подобные же прямоугольники и треугольники, которые могли бы служить в качестве счетного материала.

4. Шаблоны геометрических фигур — квадратов, прямоугольников, треугольников и кругов — для рисования.

5. Те же геометрические фигуры более крупных размеров для составления на доске числовых фигур.

6. Стенные таблицы с картинками для восприятия чисел, изучения их состава и решения задач.

7. Стенные таблицы с фигурами Лая и Макиндер.

8. Цифры печатные и прописные (на клетчатой сетке) для вывешивания на доске.

Примечание. Во время изучения первых пяти чисел дети начинают учиться писать цифры. Как уже указывалось (стр. 78), письмо цифр начинается позднее, чем узнавание цифр, и протекает медленнее. Так как оно не стоит в прямой органической связи

с остальной работой, то этот вопрос выделен в особый параграф, и о нем будет сказано ниже (стр. 85). Пока достаточно отметить, что во время проработки первого пятка можно научить детей писать цифры 1 и 2. Вопрос о решении задач разработан подробно в отдельной главе на стр. 146.

Счет до десяти и запись чисел.

Обучение счету. Дети изучили первые пять чисел, отчетливо представляют себе состав каждого числа и умеют считать до 5. Дальнейшее развитие числовых понятий будет основываться на счете.

Счет можно не доводить сразу до 10: сначала дети отсчитают 6 предметов и остановятся на этом числе; при этом они учатся узнавать (но еще не писать, как и раньше) цифру 6; затем они считают до семи и в это время учатся узнавать цифру 7 и т. д. до числа 10 включительно. Полезно считать не только отдельные предметы окружающей обстановки или упражняться в счете на специальном счетном материале, но хорошо также считать очки числовых фигур и даже останавливать внимание ребенка на группировке единиц в пределах данной числовой фигуры, не углубляя, однако, работы до так называемого изучения состава числа. Все эти упражнения в данном случае рассчитаны лишь на то, чтобы *замедлить темп счета*, сделать счет подлинно конкретным и сознательным.

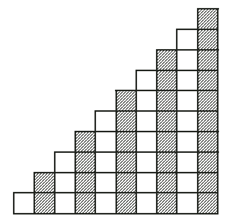
Когда неграмотные дети семи-восьмилетнего возраста начинают учиться в школе, они обычно еще не умеют сознательно считать до 10. Их уменье ограничивается механическим счетом, причем иногда оказывается, что и в механическом счете они недостаточно сильны, т. е. они не всегда умеют называть числа в последовательности натурального ряда. С этим связаны и другие отличительные особенности механического счета: неуменье отнести каждое слово словесного числового ряда к *одному, и только одному* из пересчитываемых предметов (произнося слово „один“ указать на *первый* предмет, говоря „два“, указать на *второй* предмет и т. д.), а также непонимание *цели счета*, которая заключается в том, что последнее произнесенное нами слово не только указывает порядковый номер последнего из пересчитанных предметов, но и отвечает на вопрос, сколько всего предметов мы насчитали, сколько всего предметов в данной группе.

Научить детей сознательному счету, заставляя их просто твердить напамять числовой ряд, разумеется, невозможно. Необходимо пересчитывать реальные предметы — окружающие детей вещи, специальный счетный материал, предметы на картине, которую учитель вывешивает перед классом, и т. д. По задачнику счет в пределах каждого числа начинается с пересчитывания предметов на рисунке, например, 6 болтов и 6 гаек, 7 листьев и 7 желудей и т.д. Затем дети должны сосчитать число шариков, квадратиков,

кубиков, расположенных на рисунке наподобие числовой фигуры. Счет сопровождается при этом зрительным восприятием состава числа без специальной проработки состава этого числа. Это особенно полезно для детей с ярко выраженным зрительным типом памяти, у которых одновременное восприятие группы впечатлений, привычное для раннего детского возраста, может существовать и позднее, наряду с сосчитыванием. Счет заканчивается знакомством с цифрой, которая приклеивается в тетради рядом с соответствующим числом кружков. Кружки эти полезно располагать в данном случае применительно, так сказать, к пятеричной системе счисления. В самом деле, число 5 уже хорошо известно детям. Каждое следующее число получается из этой знакомой группы путем присоединения к ней еще одной или нескольких единиц, пока не наберется второй пяток и не составится таким образом десяток.

Очень полезно во время проработки отдела „счет до десяти" *нанизывать цепочки* из заранее указанного числа желудей, гороха (предварительно размоченного в воде), ягод рябины, плодов шиповника и т. п. Нанизывая цепочку, ребенок поневоле много раз пересчитывает предметы, проверяя их число. Благодаря нанизыванию процесс счета замедляется, внимание сосредоточивается, а вместе с тем укрепляется и навык сознательного счета. Полезно изготовить цепочки, соответствующие всем числам первого десятка, и учиться их располагать в порядке натурального числового ряда.

В заключение следует провести работу с, так называемой, *числовой лесенкой* (черт. 25). Счет можно представить себе в виде восхождения по числовому ряду, словно по ступеням лестницы. Этот образ соответствует той стадии развития детей, когда числа представляются им в виде ряда слов, произносимых в определенной последовательности. Например, шесть — это слово, которое следует за пятью и предшествует семи. Работу с числовой лесенкой лучше всего начать с применения двуцветных квадратиков, из которых, один за другим, складываются столбики, составляющие лесенку. Складывая каждый столбик, дети считают: один; один, два; один, два, три и т. д. Затем, проводя по столбикам рукой (снизу вверх, начиная с левой стороны), они прямо называют число квадратиков в каждом столбце: один, два, три, четыре, пять и т. д. Лесенку полезно нарисовать в тетради, раскрасив столбики через один.

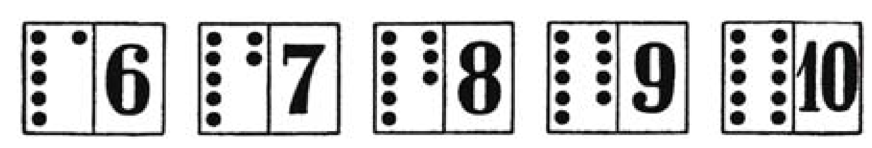


Черт. 25.

В дополнение к числовым фигурам, которые были сделаны при проработке первого пятка, можно приготовить общими силами учащихся и развесить на стене таблицы, изображенные на черт. 26.

В виде контрольной работы можно предложить учащимся разложить цифры в порядке числового ряда и под каждой цифрой поместить соответ-

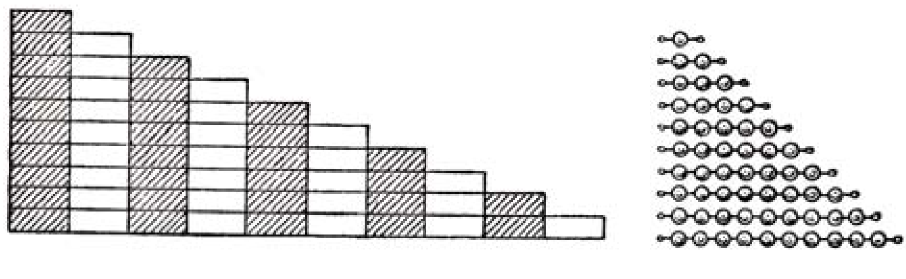
ствующую числовую фигуру. Не мешает раскладывать цифры и в произвольном порядке; при этом, разумеется, придется разместить иначе и числовые фигуры. Вместо числовых фигур можно раскладывать спички.



Черт. 26.

Во время занятий счетом продолжается начавшееся еще раньше письмо цифр. Пока дети занимаются счетом, они могут научиться писать еще две цифры: 3 и 4. О письме цифр будет сказано особо на стр. 85.

Счетный материал Монтессори. Когда идет речь об обучении детей счету, нельзя не упомянуть о некоторых пособиях, составляющих принадлежность так называемой *„системы Монтессори“*. В целом, если говорить относительно „Обучения счету по системе Монтессори“ (название книги Ю. И. Фаусек Гиз. 1924 года), приходится констатировать следующее. Во-первых, это действительно обучение *счету*, а не арифметике, хотя автор, разумеется, имел ввиду не счет, как таковой, а арифметику; однако, эта обмолвка (или неточность терминологии) как нельзя лучше отвечает основному приему обучения „по Монтессори“ — однобокому пересчитыванию, к которому сводится вся вычислительная техника. Во-вторых, это не столько *система*, сколько отрицание всякой системы, систематичности как в *обучении*, так и в самом *предмете* обучения, т. е. в данном случае в арифметике. Уже по одним этим причинам, не говоря



Черт. 27.

об идеологически чуждых советской школе общепедагогических установках „системы Монтессори“, было бы неправильно рекомендовать ее даже частично, как руководство к действию. Но некоторые пособия могут быть использованы и в нашей школе. В частности для счета в пределах десяти можно применять „дециметровые палки“, „цепочки“ и „счетные ящики“.

Набор „дециметровых палок“ длиною от одного до десяти дециметров, окрашенных попеременно в синий и красный цвет, дает возможность не только пересчитывать

дециметры, но и строить числовую лестницу. То же относится и к цепочкам. Эти пособия в том виде, как они изображены в книге Ю. И. Фаусек (стр. 10 и 31), представлены здесь на черт. 27.

Что касается „счетных ящиков", то они играют ту же роль, что и указанный выше набор разрезных цифр и палочек или спичек, т. е. имеют целью укрепить ассоциацию между цифрой и соответствующим ей числом. Изображать цифрами следует при этом числа от 1 до 10 включительно, но никак не *нуль* (у Монтессори набор состоит из 10 цифр от 0 до 9 включительно). О работе с нулем „по Монтессори" высказывается весьма неодобрительно К. Ф. Лебединцев (Введение в современную методику математики, Гиз, 1925 г.): „Верхом искусственности являются... упражнения с нулем: детям не только показывают 0, как отдельную цифру, обозначающую „ничего", т. е. отсутствие числа, но и задают им казуистические поручения вроде: „подойди ко мне *нуль* раз",, что, конечно, сначала совершенно сбивает детей с толку и заставляет руководительницу пространно разъяснять недоразумение, ею же самой вызванное".

Вопрос о том, когда и как вводить нуль, как число, является до известной степени спорным, но вводить его при изучении первого десятка безусловно преждевременно.

Письмо цифр. Остается еще сказать несколько слов о письме цифр, поскольку об узнавании цифр, сопутствующем изучению пятка и счету до десяти, мы уже говорили.

Письмо цифр, как уже неоднократно указывалось, начинается позднее их узнавания и протекает медленнее. Учить писать цифры следует в порядке числового ряда. Разница в трудности начертания цифр не настолько велика, чтобы стоило ради нее отказаться от тех преимуществ, которые дает естественная последовательность натурального ряда. Если мы изберем другую последовательность (например, 1, 4, 7, 6, 8, 9, 2, 3 и 5), то мы надолго отодвинем возможность записи тех действий, которые дети в это время производят. Так из чисел 1, 4 и 7 нельзя построить ни одного примера. Появление цифры 6 дает возможность записать только следующие примеры: $6 + 1 = 7$, $7 - 1 = 6$, $1 + 6 = 7$ и $7 - 6 = 1$. Но эти примеры не укладываются ни в какую систему и не могут стоять в связи с очередными вопросами курса. Появление, далее, цифры 8 очень мало улучшает положение и т. д. Между тем, если следовать естественному порядку чисел, то, научившись писать две первые цифры, ребенок сразу сумеет записать первые примеры: $1 + 1 = 2$ и $2 - 1 = 1$. Это особенно важно при работе с двумя группами, когда учитель вынужден давать детям письменные самостоятельные упражнения.

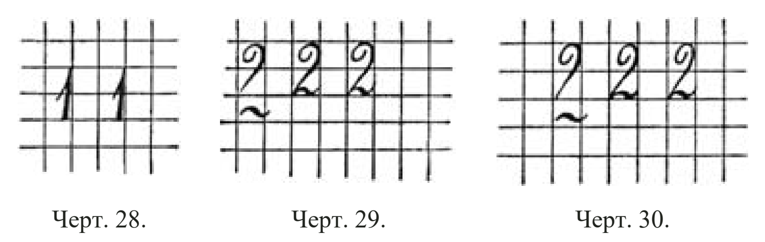
Учить писать цифры следует по одной. Сдвоенные задания допущены в задачнике, как это указывается в предисловии, лишь ради экономии места. Упражнение в списывании цифр ведется следующим образом. Учитель рисует на доске группу предметов или вывешивает соответствующую картину. Под рисунком или картиной он наносит сетку, подобную сетке в детских тетрадях, и по клеточкам пишет цифру, разъясняя детям по частям процесс письма.

Затем несколько учащихся выходят по очереди к доске и воспроизводят то, что им показал учитель. После этого дети открывают на соответствующей странице задачник и списывают цифру в тетрадь. В один урок не следует писать больше одной-двух строк цифр: наступающие затем утомление и скука могут повести только к небрежным записям и к образованию у детей неразборчивого, некрасивого почерка. Не следует забывать, что правильное, четкое изображение цифр еще важнее, чем изображение букв: ошибку в слове легче заметить и исправить, чем ошибку в записи числа.

Цифры надо писать вышиною в 2 клетки и с легким наклоном. Следующие указания к письму цифр заимствованы нами, с некоторыми изменениями, из книги Д. Л. Волковского под ред. А. С. Пчелко. — Арифметика в начальной школе, изд. 1933 г.

Цифра 1 пишется в два приема: сначала ведется тонкая черта снизу вверх, затем прямая черта одинаковой толщины сверху вниз.

Письмо **цифры 2** изучается по частям.



Черт. 28. Черт. 29. Черт. 30.

Сначала учитель разъясняет детям, как писать верхнюю часть цифры 2: сперва ведется тонкая черта сверху вниз, затем тонкая черта снизу вверх, далее — черта сверху вниз с утолщением вверху и тонко внизу. Эта верхняя часть цифры 2 похожа на крючок для ужения рыбы — не надо замыкать наверху изогнутую линию. Затем учитель разъясняет, как писать нижнюю, часть цифры 2: сперва ведется тонкая черта снизу вверх, затем толстая черта сверху вниз и, наконец, тонкая черта снизу вверх. После этого учитель показывает, как писать цифру 2 в четыре приема: тонкую черту сверху вниз, тонкую черту снизу вверх; далее черту сверху вниз с утолщением вверху и тонко внизу и, наконец, „хвостик" внизу (волнистую линию).

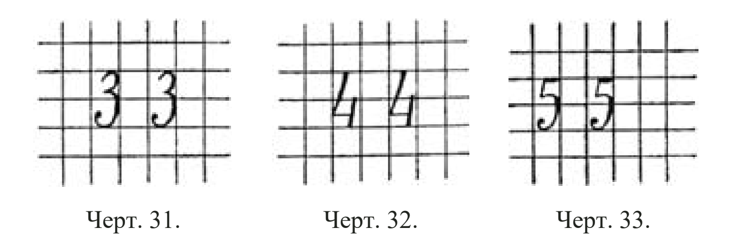
Цифра 3 пишется в три приема: сначала верхний „крючок" (полуовал), затем нижний крючок (полуовал), и, наконец, точка у нижнего крючка. Точку надо закручивать по направлению движения часовой стрелки, а не наоборот, как часто делают дети (черт. 31).

Цифра 4 состоит из трех частей: прямой стоячей палочки, прямой лежачей палочки и снова прямой стоячей палочки. Стоячие палочки пишутся с легким наклоном (черт. 32).

Цифра 5 пишется в четыре приема: сначала средняя часть цифры (прямая стоячая черта), затем нижняя часть (полуовал и точка) и, наконец, верхняя часть (прямая лежачая черта) (черт. 33).

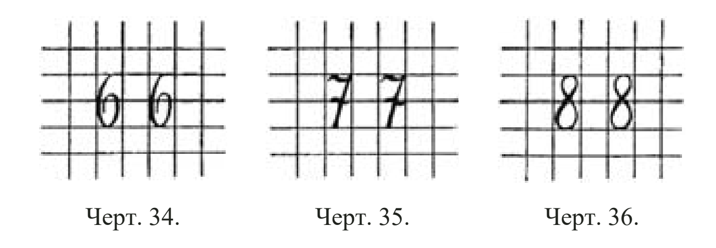
Цифра 6 пишется в 2 приема: сначала левый полукружок, причем черта ведется сверху вниз с утолщением посредине; затем пишется правый полукружок без перерыва черты и без утолщения. Замыкать линию не надо.

Цифра 7 состоит из трех частей. Ее верхняя часть похожа на нижний „хвостик“ цифры 2; от этой верхней волнистой линии сверху вниз ведут прямую стоячую палочку, как у цифры 1; посредине делается небольшая волнистая линия с легким нажимом. Это добавление помогает отличить цифру 7 от единицы и четверки.



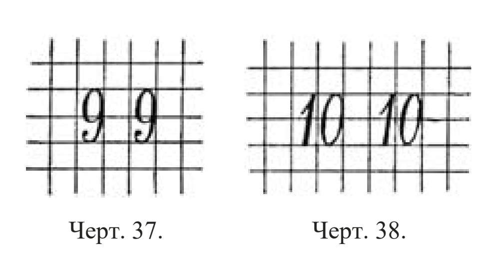
Черт. 31. Черт. 32. Черт. 33.

Цифра 8 пишется в два приема: во-первых, пишут верхний левый полуовал, ведя тонкую черту снизу вверх, и верхний правый полуовал, ведя черту сверху вниз с утолщением; во-вторых, пишут нижний левый полуовал, ведя черту сверху вниз с нажимом, и нижний правый полуовал, ведя тонкую черту снизу вверх.



Черт. 34. Черт. 35. Черт. 36.

Цифру 9 пишут в четыре приема: сначала делают левый полуовал, ведя черту сверху вниз с легким нажимом, затем делают правый полуовал снизу вверх без нажима; после этого выписывают правый большой полуовал, ведя линию сверху вниз с утолщением посредине, и, наконец, ставят точку.



Черт. 37. Черт. 38.

Число 10, в отличие от остальных чисел первого десятка, обозначается двумя знаками. На это следует обратить внимание учащихся. Следует также сказать, что новый знак, которого они еще не встречали, носит название нуля. Никаких других объяснений относительно записи числа 10 давать детям в этом месте курса не надо.

Как писать единицу, было уже разъяснено. Что касается нуля, то его пишут в два приема: сначала левый полуовал, ведя черту сверху вниз с нажимом посредине, а затем правый полуовал, ведя тонкую черту снизу вверх.

Сложение и вычитание в пределах десяти.

Общие замечания. Изучение сложения и вычитания в пределах десяти ведется в той последовательности, которая определяется *таблицей сложения и вычитания* (см. стр. 65).

Таблица эта построена по принципу постепенного возрастания трудности вычислительных приемов и взаимосвязи между прямым и обратным действием. Она заключает в себе все суммы однозначных чисел, не превышающие числа 10, и все соответствующие разности (о соответствующих разностях см. также стр. 64). На усвоение всех этих сумм и разностей (всего 90 случаев) приходится затрачивать довольно много времени, обычно около двух месяцев. Большая часть этого времени идет на упражнения в вычислениях, а под конец несколько уроков уходит на закрепление навыков и на повторение состава чисел первого десятка.

Обычные термины арифметических действий — сложение, сложить, вычитание, вычесть и т. д. выражают отвлеченные понятия, не употребительные в обычной повседневной жизни. В первом и во втором году, когда самые понятия детей об арифметических действиях образны, надо и терминами пользоваться такими, которые вызывали бы у детей соответствующие образы: прибавить, да, отнять, без, получится, будет. Однако, вносить в эту детскую терминологию чрезмерную пестроту тоже не следует. Надо помнить, что слова *прибавить, получится* и т. д. все же играют роль терминов, выражающих в конкретной форме отвлеченные понятия сложения и вычитания, и с этой точки зрения им полезно придать известную устойчивость и однообразие. Привыкнув выражать сложение во всех случаях словом *прибавить*, а вычитание — словом *отнять*, дети впоследствии без труда перейдут к употреблению слов *сложить* и *вычесть*. Точно также, научившись применять выражение *получится* не только при сложении, но и при вычитании (а в дальнейшем при умножении и делении), они легче усвоят универсальный термин *равняется*, его смысл и употребление.

Прибавление и отнимание по одному. Этот первый шаг в сложении и вычитании непосредственно основывается на счете, т. е. на натуральном числовом ряде. Прибавляя, например, один квадратик к пяти квадратикам, дети называют результат, не *пересчитывая* всех квадратиков снова. Они говорят: 6 квадратиков, зная, что в числовом ряду за словом пять следует слово шесть. Отнимая же от 6 квадратиков один квадратик, они говорят пять, основываясь на том, что число пять предшествует числу шесть.

Тема прорабатывается по следующему плану:

Прибавление единицы ко всем числам первого десятка от одного до девяти включительно. Учитель проделывает это упражнение на классных счетах, а дети — на кубиках, кружках, спичках. Прибавляя на счетах шарики один за другим,

учитель говорит, а дети вслед за ним повторяют: один да один — будет два; два да один — будет три; три да один — будет четыре, и т. д. Это упражнение имеет целью установить тесную связь между прибавлением по одному и натуральным рядом чисел. В задачнике изображена нитка, на которую нанизывают бусы. Дети говорят, глядя на картину:

Нанизали одну бусинку, потом еще одну. Один да один, будет два. К двум бусинам прибавили еще одну, стало три бусины, и т. д.

Потом, показывая пальцем на цифры в задачнике, они складывают устно:

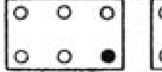
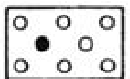
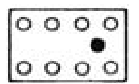
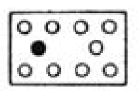
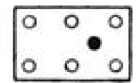
$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

называя промежуточные результаты и окончательный ответ.

Отнимание единицы от всех чисел первого десятка, начиная с десяти и кончая двумя, ведется на тех же пособиях и в той же последовательности, как и предыдущее упражнение.

Сложение и вычитание попеременно в последовательности числового ряда и вразбивку. Особое внимание уделяется при этом тем случаям сложения и вычитания, которые не встречались детям при проработке первого пятка, а именно, суммам 5 + 1, 6 + 1, 7 + 1, 8 + 1 и 9 + 1 и соответствующим разностям. Изучение этих сумм и разностей составляет основную задачу данной главы курса.

Учитель откладывает на счетах 5 шариков: Сколько здесь шариков? спрашивает он. Медленно придвигая еще один шарик, он говорит: к пяти прибавить один — сколько получится? Надо ли заново пересчитывать все шарики, чтобы ответить на этот вопрос? Дети отвечают на поставленные вопросы и проделывают то же упражнение на своем счетном материале. Так же прорабатывается и вычитание. Учитель откладывает на счетах 6 шариков и предлагает детям сосчитать их. Затем, медленно отодвигая один шарик, он говорит: от шести отнять один — сколько получится? Надо ли заново пересчитывать оставшиеся шарики, чтобы ответить на этот вопрос? То, что учитель делает на счетах, дети делают на дидактическом материале. Затем можно решить с ними две задачи — на сложение и на вычитание. По такому плану прорабатываются и остальные случаи прибавления и отнимания по одному.

Черт. 39.

Сложение и вычитание в разбивку можно повторить на числовых фигурах:

Сколько белых кружков в первой рамке? Сколько черных кружков? Сколько всего? Сколько белых кружков во второй рамке? и т. д.

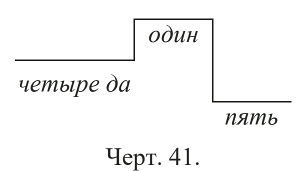
От 6 кружков в первой рамке отними 1 черный кружок. Сколько кружков останется? От 8 кружков во второй рамке отними один черный кружок и т. д.

Когда прибавление и отнимание по одному пройдено, можно еще раз повторить эту часть таблицы, пользуясь числовой лесенкой. Дети кладут перед собой черный квадратик. Затем берут желтый квадратик, прибавляют к нему черный и кладут рядом с первым черным, как показано на рисунке. После этого к двум желтым квадратикам

они прибавляют один черный, получают три квадратика, которые помещают рядом с двумя и т. д. Сложив лесенку, повторяют еще раз таблицу: один; один да один — два; два да один — три и т. д. Говоря таким образом, ученик показывает соответствующие числа на числовой лесенке. Таким же образом, снимая по одному черному квадратику с каждого столбика, ученик повторяет вычитание: десять без одного — девять; девять без одного — восемь и т. д.

Черт. 40.

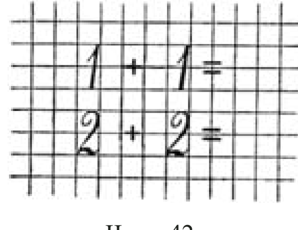
При повторении таблицы сложения и вычитания, детей учат произносить ее ритмически, сперва в одиночку, а потом хором. При этом необходимо соблюдать повышение и понижение голоса, а также остановки, которые способствуют выразительности речи. Графически это можно изобразить при помощи такой схемы (см. рис. 41): средняя высота — четыре, выше — один, низко — пять. После слова один — небольшая пауза.



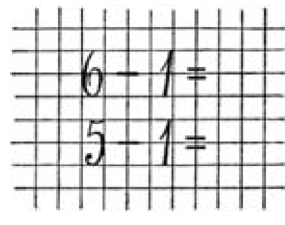
Черт. 41.

При хоровом чтении таблицы учитель указывает на соответствующие столбики числовой лесенки.

Последнее упражнение заключается в списывании и решении примеров на доске и в тетради. Дети в это время уже умеют писать шесть цифр. Лучше, если в это время они будут списывать примеры не из книги, в которой они видят печатный шрифт, а с доски. На доске примеры должны быть написаны на клетчатой сетке. Не надо забывать писать у нерешенного еще примера знак равенства, который дети читают в это время, как получится или будет и который они склонны на первых порах пропускать. Запись на доске будет иметь примерно такой вид:



Черт. 42.



Черт. 43.

Прибавление и отнимание по два. В этом случае сложение и вычитание сводятся к присчитыванию и отсчитыванию по одному, которые, в свою очередь, опираются на счет, иначе говоря, на натуральный ряд. Здесь учащиеся впервые знакомятся с *основным вычислительным приемом,* характерным для концентра первого десятка.

Прием этот прорабатывается следующим образом:

Учитель откладывает на счетах 4 шарика и на некотором расстоянии от них еще 2 шарика. Сколько шариков я отложил налево? спрашивает учитель, сколько шариков

направо? Получив от детей нужный ответ, он продолжает: прибавим, присчитаем к четырем шарикам два шарика. Как это сделать? Один шарик он медленно придвигает к четырем и спрашивает при этом: четыре да один — сколько получится? Потом придвигает другой шарик и спрашивает: пять да один — сколько получится? Остается подвести итог: к четырем прибавить два — сколько получится? Учащиеся отвечают полным ответом: к четырем прибавить два, получится шесть. Чтобы прием присчитывания двух был для детей ясен, следует предложить еще вопрос: как мы прибавили к четырем два? Необходимо и в этом случае обратить внимание учащихся на то, что, прибавляя два шарика к четырем, им не пришлось пересчитывать все шарики *заново*, а достаточно было продолжить числовой ряд.

Упражнение с классными счетами сопровождается сложением на квадратиках, кружках, спичках и т. п. и заканчивается решением задачи. Вычитание прорабатывается по образцу сложения.

В целом прибавление и отнимание по два изучается по следующему плану:

Прибавление двух ко всем четным числам, а именно: 2 + 2, 4 + 2, 6 + 2 и 8 + 2. Это упражнение проделывается на наглядных пособиях и по картинке в задачнике. Цель его — установить связь с числовым рядом, который в данном случае приходится пробегать быстрее, чем в случае прибавления по одному. Кружки, расставленные на картине парами, дети считают так: громко — два, про себя — три, громко — четыре, про себя — пять, громко — шесть и т. д. Потом повторяют быстрее; два — четыре — шесть — восемь — десять.

Отнимание двух от всех четных чисел, а именно: 10 − 2, 8 − 2, 6 − 2 и 4 − 2; прорабатывается по образцу прибавления.

Затем следует *подробная проработка вычислительных приемов* прибавления двух к четырем, шести и восьми, а также отнимания двух от шести, восьми и десяти, так как это *новые* случаи, с которыми дети еще не встречались при изучении первых пяти чисел. Сложение и вычитание даются здесь параллельно, в следующем порядке: 4 + 2, 6 − 2; 6 + 2, 8 − 2; 8 + 2, 10 − 2. Сначала прием прорабатывается на дидактическом материале, затем дети решают задачи и примеры.

Повторение изученной части таблицы на числовой лесенке; проводится таким же способом, как и повторение присчитывания по одному (см. стр. 89). Прибавляя по два, мы восходим по числовому ряду *через одно число*, словно по лестнице через одну ступеньку. Складывая лесенку из квадратиков, мы представляем этот процесс наглядно: кладем 2 черных квадратика и говорим два; кладем рядом два желтых квадратика, а над ними 2 черных и говорим четыре, пропуская число три и т. д.

Ритмическое чтение таблицы отдельными учениками и хором всем классом (см. выше).

Решение примеров на доске и в тетради.

Прибавление и отнимание по два к *нечетным* числам ведется по такому же плану.

Прибавление и отнимание по три. Эта часть таблицы прорабатывается в следующем порядке. Первая группа примеров: <u>3 + 3</u>, <u>6 + 3</u>, <u>9 − 3</u>, <u>6 − 3</u>; вторая группа: 1 + 3, <u>4 + 3</u>, <u>7 + 3</u>, <u>10 − 3</u>, <u>7 − 3</u> и 4 − 3; третья группа: 2 + 3, <u>5 + 3</u>, <u>8 − 3</u> и 5 − 3. Из всех этих сумм и разностей новыми являются те, которые подчеркнуты, им приходится уделять главное внимание. Работа отли-

чается от предшествующей только тем, что здесь дети впервые встречаются с приемом прибавления и отнимания группами. Так, чтобы сложить 7 кружков и 3 кружка, можно воспользоваться уже известным приемом прибавления по одному, а именно, считать следующим образом: 7 + 1 = 8; 8 + 1 = 9 и, наконец, 9 + 1 = 10. Но можно сделать это и короче. С одной стороны, 3 = 2 + 1; с другой стороны, дети уже знают, что 7 + 2 = 9. А потому можно сразу к семи прибавить два — получится девять; к девяти прибавить еще один — получится десять. Еще лучше поступить так: присчитать сначала единицу, а затем уже два. Это удобнее в том отношении, что к четным числам, как показывает опыт, детям легче прибавить два, чем к нечетным. Все, что сказано здесь о сложении, касается в такой же мере и вычитания.

Прием прибавления и отнимания группами, как это легко видеть, опирается, подобно основному приему присчитывания по одному, на счет, т. е. на числовой ряд. В конце концов операция прибавления трех к семи сводится к следующему: сказать громко семь, про себя восемь, вполголоса девять и, наконец, снова громко десять. Или иначе: громко семь, вполголоса восемь, про себя девять и, наконец, снова громко десять.

Прорабатывая прибавление по три на числовой лесенке, мы представляем процесс восхождения по числовому ряду наглядно и говорим совсем коротко: три да три — шесть; шесть да три — девять, или: один да три — четыре; четыре да три — семь; семь да три — десять, или, наконец: два да три — пять; пять да три — восемь.

Прибавление и отнимание по четыре. Прибавление и отнимание по четыре связано с дальнейшим расширением приема прибавления и отнимания группами. С другой стороны, здесь впервые является потребность в применении переместительного свойства сложения. В самом деле, до сих пор детям пришлось иметь дело со следующими случаями прибавления большего числа к меньшему: 1 + 2, 1 + 3, 2 + 3 и 1 + 4. Все эти случаи относятся к области первых пяти чисел, когда при нахождении результатов действий дети не вычисляли, а просто опирались на знание состава числа. Теперь мы встречаемся впервые с такими случаями, как 2 + 4 и 3 + 4, которые, с одной стороны, являются новыми, выходящими за пределы тех чисел, состав которых детям известен, а с другой стороны, могут быть заменены другими, более легкими и уже известными. С этого и можно начать проработку данного раздела.

Показать, что 2 + 4 = 4 + 2 учащимся первой группы можно только на наглядных пособиях — на классных счетах, на кружках, квадратиках и т. п.

Налево дети откладывают 2 квадратика, направо 4. Затем придвигают, прибавляют четыре к двум по одному: 2 + 1 = 3; 3 + 1 = 4: 4 + 1 = 5; 5 + 1 = 6. После этого, отодвинув

два и четыре квадратика на старые места, они снова производят сложение, но теперь уже наоборот: к четырем прибавляют два по одному. Оказывается, что это гораздо быстрее, легче: $4 + 1 = 5$; $5 + 1 = 6$, а результат тот же, что и в первом случае. Точно так же дети убеждаются, что $3 + 4 = 4 + 3$. На основе сложения дается вычитание. В самом деле, если $2 + 4 = 6$, значит $6 - 4 = 2$ и, точно так же, если $3 + 4 = 7$, значит $7 - 4 = 3$.

После этого остается проработать следующие случаи сложения и вычитания: $4 + 4$, $8 - 4$; $5 + 4$, $9 - 4$; $6 + 4$ и $10 - 4$.

Здесь снова придется вернуться к приему, основанному на сочетательном свойстве. При этом прием прибавления по одному должен вскоре же уступить место более совершенному приему прибавления по два. В самом деле, с одной стороны, дети знают, что $4 = 2 + 2$, с другой стороны, они уже запомнили результаты прибавления двух ко всем числам в пределах 10, в частности, им известно, что $4 + 2 = 6$ и $6 + 2 = 8$. А в таком случае прибавить четыре к четырем можно так: $4 + 2 + 2 = 8$. Прибавляя таким же способом четыре к пяти и к шести, дети проделывают это сначала на наглядных пособиях, а затем мысленно, восходя по числовому ряду, как по лестнице. Когда они научатся прибавлять четыре, переступая через одну ступеньку, они сумеют сделать это скорее, т. е. прибавлять четыре, переступая сразу через три ступеньки: четыре да четыре — восемь, или: один да четыре — пять, пять да четыре — девять, или, наконец: два да четыре — шесть, шесть да четыре — десять.

Изучение второй части таблицы. Запоминание всей таблицы наизусть. Прием прибавления пяти, шести, семи, восьми и девяти уже целиком опирается на переместительное свойство сложения (за исключением одного только случая $5 + 5$). Благодаря этому, как уже указывалось, значительно сокращается труд на изучение второй части таблицы: зная, что $5 + 2 = 7$, учащиеся легко находят сумму $2 + 5$. Если дети усвоят понятие о переместительном свойстве сложения, число фраз в таблице, подлежащее запоминанию, сократится почти вдвое. Суммы и разности в пределах пяти можно считать известными детям еще до поступления в школу — их всего 20. Присчитывание по единице опирается непосредственно на числовый ряд, поэтому запоминание результатов этого присчитывания не потребует никакого труда. Наконец, если ученик усвоил понятие о связи между вычитанием и сложением (стр. 64), то на усвоение таблицы вычитания не потребуется никаких усилий. Останется 14 случаев сложения, на которые учитель и должен направить особое внимание. Посмотрим, как происходит запоминание наизусть этих 14 случаев. Проследим, например, *процесс запоминания суммы* $5 + 4$.

Дети прибавляют к 5 предметам 4 предмета сперва по одному, потом по два. Через некоторое время эта сумма может встретиться в задаче, например, потребуется к 5 яблокам прибавить 4 яблока. Эту операцию ученик выполняет уже в воображении,

но довольно еще медленно: 5 + 1 + 1 + 1 + 1 или 5 + 2 + 2. В первом случае он говорит громко 5, про себя 6, 7, 8 и снова громко 9. Мы видим, что ученик как бы совершает переход от 5 к 9 по натуральному ряду чисел. Когда ему встретится новый повод для сложения пяти и четырех, он повторяет этот переход, но уже скорее. Постепенно процесс механизируется, беглость увеличивается, пока, наконец, фраза *пять да четыре – девять* не сделается достоянием памяти. В это время учащийся уже не нуждается ни в наглядных пособиях, ни в каких-либо вычислительных приемах. За словами: пять да четыре, в силу образовавшейся ассоциации, механически следует слово девять.

Так протекает процесс усвоения наизусть таблицы сложения и вычитания в пределах 10 при изучении этого концентра посредством *вычислительного метода* или *метода действий*. Преимущества такого изучения таблицы по сравнению с механическим заучиванием заключаются в том, что дети при каждом повторном выполнении действия подбирают кратчайший прием вычисления, что способствует образованию у них понятий об основных свойствах арифметических действий.

По мере изучения отдельных частей таблицы, следует вывешивать эти части одну за другой на стенке в классе. Таблица в целом может иметь примерно следующий вид:

1

1 + 1 = 2	2 − 1 = 1
2 + 1 = 3	3 − 1 = 2
3 + 1 = 4	4 − 1 = 3
4 + 1 = 5	5 − 1 = 4
5 + 1 = 6	6 − 1 = 5
6 + 1 = 7	7 − 1 = 6
7 + 1 = 8	8 − 1 = 7
8 + 1 = 9	9 − 1 = 8
9 + 1 = 10	10 − 1 = 9

2

1 + 2 = 3	3 − 2 = 1
2 + 2 = 4	4 − 2 = 2
3 + 2 = 5	5 − 2 = 3
4 + 2 = 6	6 − 2 = 4
5 + 2 = 7	7 − 2 = 5
6 + 2 = 8	8 − 2 = 6
7 + 2 = 9	9 − 2 = 7
8 + 2 = 10	10 − 2 = 8

3

1 + 3 = 4	4 − 3 = 1
2 + 3 = 5	5 − 3 = 2
3 + 3 = 6	6 − 3 = 3
4 + 3 = 7	7 − 3 = 4
5 + 3 = 8	8 − 3 = 5
6 + 3 = 9	9 − 3 = 6
7 + 3 = 10	10 − 3 = 7

4

1 + 4 = 5	5 − 4 = 1
2 + 4 = 6	6 − 4 = 2
3 + 4 = 7	7 − 4 = 3
4 + 4 = 8	8 − 4 = 4
5 + 4 = 9	9 − 4 = 5
6 + 4 = 10	10 − 4 = 6

5

1 + 5 = 6	6 − 5 = 1
2 + 5 = 7	7 − 5 = 2
3 + 5 = 8	8 − 5 = 3
4 + 5 = 9	9 − 5 = 4
5 + 5 = 10	10 − 5 = 5
1 + 6 = 7	7 − 6 = 1
2 + 6 = 8	8 − 6 = 2
3 + 6 = 9	9 − 6 = 3
4 + 6 = 10	10 − 6 = 4

6

1 + 7 = 8	8 − 7 = 1
2 + 7 = 9	9 − 7 = 2
3 + 7 = 10	10 − 7 = 3
1 + 8 = 9	9 − 8 = 1
2 + 8 = 10	10 − 8 = 2
1 + 9 = 10	10 − 1 = 9

Пользуясь этим пособием, можно вести с учащимися ритмическое чтение отдельных частей таблицы поодиночке и хором. Учитель указывает пример за примером, а дети произносят вслух соответствующие фразы.

Для лучшего запоминания таблицы примеры для повторения можно располагать группами. Вот образцы таких групп:

1) 3 + 3	1 + 3	10 − 3	2 + 3	2) 8 + 2	3) 3 + 3
6 + 3	4 + 3	7 − 3	5 + 3	2 + 8	3 + 4
9 − 3	7 + 3	4 − 3	8 − 3	10 − 2	4 + 4
6 − 3			5 − 3	10 − 8	4 + 5

Подбор примеров в третьей группе основан на том общеизвестном факте, что суммы равных слагаемых почему-то легче усваиваются детьми, чем остальные суммы, и таким образом они могут служить опорными пунктами при нахождении смежных сумм.

Вот образцы упражнений на сложение и вычитание:

а) Присчитайте к шести три по одному. Говорите, сколько будете получать? Ответ: (громко) шесть; (тише) семь, восемь; (громко) девять.

б) Присчитайте к шести четыре по два. Говорите, сколько будете получать? Ответ: (громко) шесть; (тише) восемь; (громко) десять.

Кроме отвлеченных примеров запоминанию таблиц будет способствовать решение задач и разные игры (см. стр. 166).

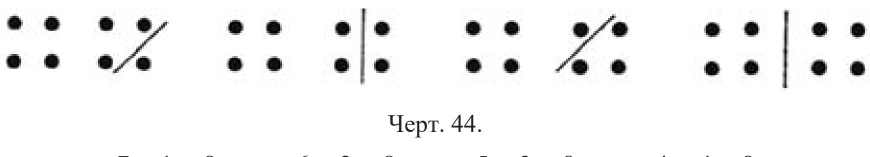
Состав числа. Когда таблица сложения и вычитания усвоена, следует сгруппировать примеры так, чтобы состав каждого числа обнаруживался вполне и легче запоминался. Вот образцы такой группировки:

Число 6.			*Число 7.*		
5 + 1	4 + 2	3 + 3	6 + 1	5 + 2	4 + 3
6 − 1	6 − 2	6 − 3	7 − 1	7 − 2	7 − 3
1 + 5	2 + 4		1 + 6	2 + 5	3 + 4
6 − 5	6 − 4		7 − 6	7 − 5	7 − 4

Состав числа удобно пояснить при помощи числовых фигур Лая (см. стр. 75).



Число 8.



Черт. 44.

7 + 1 = 8	6 + 2 = 8	5 + 3 = 8	4 + 4 = 8
8 − 1 = 7	8 − 2 = 6	8 − 3 = 5	8 − 4 = 4
1 + 7 = 8	2 + 6 = 8	3 + 5 = 8	
8 − 7 = 1	8 − 6 = 2	8 − 3 = 5	

Такие упражнения с числовыми фигурами направляют внимание учащихся на связь между прямым и обратным действием и на переместительность слагаемых, а вместе с тем содействуют запоминанию состава числа. Этой же цели могут служить и другие фигуры. Вот удобная фигура для проработки числа 9.

Число 9.

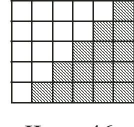
Черт. 45.

8 + 1 = 9	7 + 2 = 9	6 + 3 = 9	5 + 4 = 9
9 − 1 = 8	9 − 2 = 7	9 − 3 = 6	9 − 4 = 5
1 + 8 = 9	2 + 7 = 9	3 + 6 = 9	4 + 5 = 9
9 − 8 = 1	9 − 7 = 2	9 − 6 = 3	9 − 5 = 4

Состав числа можно иллюстрировать при помощи двуцветных квадратиков. Учитель предлагает детям положить подряд 5 желтых квадратиков.

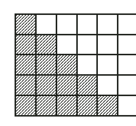
Сколько надо добавить черных квадратиков, чтобы всего получилось 6 квадратиков? спрашивает он.

Дети прибавляют 1 черный квадратик и решают пример вопросительным знаком. Вот все упражнения этого рода, относящиеся к числу 6.



Черт. 46.

5 + ? = 6	? + 5 = 6
4 + ? = 6	? + 4 = 6
3 + ? = 6	? + 3 = 6
2 + ? = 6	? + 2 = 6
1 + ? = 6	? + 1 = 6



Черт. 47.

Состав числа из нескольких слагаемых удобно связать с разменом гривенника и с составлением различных сумм в пределах 10 из мелких монет. В это же время полезно познакомить детей с магическими квадратами.

1	3	4
4	1	3
3	4	1

1	3	5
4	4	2
4	3	2

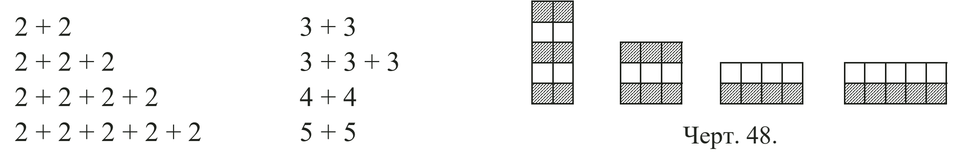
4	3	
2		3
4	2	

3	1	5
	3	
		2

Складывая числа по рядам и столбцам, дети видят, что для каждого квадрата существует постоянное число, которому равны все получаемые суммы. Переходя к квадратам, в которых некоторые числа пропущены, дети находят эти числа при помощи вычислений. После этого можно ввести игру в магические квадраты (см. стр 168).

Состав чисел первого десятка из равных слагаемых сводится к следующим немногим суммам:

2 + 2 3 + 3
2 + 2 + 2 3 + 3 + 3
2 + 2 + 2 + 2 4 + 4
2 + 2 + 2 + 2 + 2 5 + 5



Черт. 48.

Эти суммы можно пояснить при помощи фигур, составленных из двуцветных квадратиков.

Квадрат, прямоугольник, треугольник, круг.

Знакомство с этими геометрическими фигурами начинается с первых уроков математики в первом классе и заключается прежде всего в узнавании этих фигур, в умении отличить их от других и правильно назвать. Вводятся эти фигуры по одной в следующем порядке: круг, треугольник, квадрат и прямоугольник.

Круг, кружок дети умеют узнавать и называть еще до поступления в школу. У малышей-дошкольников уже замечется стремление „накручивать“ карандашем нечто вроде кругов или спиралей. Рисовать кружки, разумеется, не вполне геометрически-правильные, они начинают очень рано. Изображая человечков, они приделывают им круглые головы. Солнце рисуют в виде кружка с лучами, луну — в виде круга с глазами, носом и ртом. На первых же порах в школе следует дать детям в руки кружки разного цвета и разной величины для проработки арифметического материала (счет, составление числовых фигур) и для выяснения понятий больше — меньше.

Следующим вводится равносторонний *треугольник*, в связи с изучением числа 3. Прежде всего дети составляют треугольник из спичек или палочек.

Равносторонний треугольник, как правильная фигура, доступнее детям и удобнее для составления числовых фигур, чем другие виды треугольников. Вот почему на первых порах следует ограничиться знакомством детей именно с равносторонним треугольником. Наборы треугольников могут служить тем же целям, что и наборы кружков.

При изучении числа 4 можно познакомить детей с *квадратом*. Подобно треугольнику, они составляют его из спичек или палочек. При этом выясняется, что палочки должны быть одинаковой длины (понятие „длиннее — короче“ дети к этому времени уже имеют). От квадрата естественно перейти к прямоугольнику, который тоже можно сложить из четырех палочек: двух одинаковых палочек подлиннее и двух других одинаковых палочек покороче. Затем дети получают готовые квадратики и прямоугольники из картона для счета и составления числовых фигур.

Геометрическими фигурами дети пользуются и как шаблонами для рисования. Это, быть может, самый верный путь для знакомства с геометрическими формами.

Дети кладут шаблон фигуры на бумагу и обводят его карандашем. Затем свой рисунок они раскрашивают цветными карандашами. „Окрашивание карандашем есть нечто вроде осязания площадей и контуров, нечто вроде многократного непрерывного их ощупывания концом карандаша“, говорит А. Р. Кулишер (Методика и дидактика геометрии, изд. „Сеятель“, 1923 г.).

После такой подготовки можно заняться рисованием квадрата, прямоугольника и треугольника по клеточкам. Здесь первое место должен занять квадрат. Полезно связать это рисование с изучением счета до 10. Тогда подсчет клеточек при рисовании геометрических фигур будет служить связующим звеном между работой по арифметике и усвоением элементов начальной геометрии.

Прямая и кривая линия. Метр.

Во время подвижных игр дети перебегают с места на место иной раз прямо, напрямик, в другой раз — кругом, по кривой линии. Полезно обратить на это внимание детей и тут же выяснить, какой путь короче, какой длиннее. Затем в классе учитель предлагает двум ученикам держать натянутую веревку за ее концы — это прямая линия. После этого дети отпускают веревку, она отвисает, выгибается — это кривая линия. Чтобы провести на доске прямую линию, можно натереть веревку мелом, натянуть ее у самой доски как можно сильнее и дернуть за середину, как струну. На доске получится отпечаток прямой. Если сложить вдвое лист бумаги, линия сгиба будет прямой.

На бумаге между двумя точками дети проводят прямую линию и кривую. Прямые линии надо чертить по линейке хорошо отточенным карандашом. Ли-

ния, которую мы проведем без линейки, чаще всего выходит кривой. Через две точки можно провести сколько угодно кривых линий и только одну прямую.

В учебнике дети рассматривают рисунки (на стр. 23) и отыскивают прямые и кривые линии. Затем рисуют у себя в тетради разные предметы, контуры которых состоят из прямых или кривых линий.

Чтобы познакомить детей с метром, им выдаются бумажные полоски и несколько эталонов метра. Каждый ученик отмеряет на своей полоске ровно метр, а излишек отрывает. Своими метрами дети отмеривают на полу и на стенах класса по заданию учителя отрезки определенной длины. При начале знакомства с метром лучше именно не измерять, а отмеривать, чтобы избежать тех неудобств, которые связаны с получением остатка. Познакомившись практически с метром, дети решают задачи по учебнику, относящиеся к измерению метром.

ВТОРОЙ ДЕСЯТОК.

Цель и содержание концентра второго десятка.

Целесообразность выделения второго десятка в особый концентр. По следующим соображениям необходимо выделить второй десяток в особый концентр:

1. Чтобы складывать любые многозначные числа, надо знать наизусть все суммы однозначных чисел попарно, а чтобы вычитать — все соответствующие разности. Совокупность всех этих сумм и разностей составляет *таблицу сложения и вычитания*. Знание наизусть этой таблицы имеет значение не только для сложения и вычитания многозначных чисел, но и для умножения и деления, поскольку на основе таблицы сложения и вычитания строится таблица умножения и деления. Наибольшая сумма двух однозначных чисел равна 18. Таким образом, таблица сложения, а следовательно и вычитания, *заключается в пределах двух десятков*. Отсюда важность выделения второго десятка в особый концентр.

2. В пределах второго десятка мы встречаемся впервые с десятичной группировкой единиц и с теми вычислительными приемами, которые основаны на этой группировке. Эта группировка и эти вычислительные приемы являются прототипом дальнейших ступеней развития десятичной системы счисления и связанных с нею механизмов действий. Закономерности, лежащие в основе этой системы и этих механизмов действий, легче показать и понять на небольших числах. Вот почему следует сосредоточить внимание учащихся на том концентре, где они впервые могут наблюдать эти закономерности, т. е. на концентре второго десятка.

Сложение и вычитание без перехода и с переходом через десяток. Все суммы и разности в пределах 20 можно разделить на 2 категории:

1. Суммы однозначных чисел, взятых по два, и соответствующие разности; эти суммы и разности носят название *табличных*.

2. Все остальные суммы и разности в пределах 20, которые называются *внетабличными*.

Таким образом, внетабличными являются все случаи сложения двузначного числа с однозначным и однозначного с двузначным, когда сумма этих чисел не превышает 20. Внетабличными же являются тем самым и соответствующие случаи вычитания.

Если все табличные суммы расположить в клетках квадрата, можно ясно видеть, какие из этих сумм относятся к концентру десятка. В количестве 45 они занимают *левую* часть квадрата и вместе с соответствующими разностями составляют те 90 случаев, о которых шла речь в предыдущей главе.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

В *правой* части таблицы помещаются остальные суммы в количестве 36. Вместе с соответствующими разностями они составляют 72 случая, которые еще остается изучить.

Отличительная особенность этих 36 табличных сумм заключается в том, что все они *превышают десяток*. Такое табличное сложение и соответствующее ему вычитание носят название *сложения и вычитания с переходом через десяток*. Наряду с этим внетабличное сложение и вычитание иначе называется *сложением и вычитанием без перехода через десяток*.

Таким образом, изучая второй десяток, придется проработать сложение и вычитание без перехода через десяток и с переходом через десяток.

Чтобы научиться складывать и вычитать без перехода через десяток, нет надобности перебирать во что бы то ни стало все 180 случаев этого сложения и вычитания. Достаточно сгруппировать их по сходству вычислительных приемов и изучать не каждый *пример* в отдельности, а каждый *прием* в отдельности.

Что касается 72 табличных сумм и разностей, то в данном случае вычислительные приемы применяются лишь до поры, до времени, с одной стороны, с целью постепенного усвоения учащимися основных понятий арифметических действий (так называемых, свойств действий), с другой

стороны, во избежание механической зубрежки. Но в конце концов эти 72 табличных случая надо просто запомнить наизусть.

В основу построения такой *таблицы* мы кладем те же принципы, что и в основу таблицы сложения и вычитания в пределах 10: постепенное нарастание трудности и взаимосвязь между прямым и обратным действием. Самый легкий случай сложения — это сложение 9 и 2, самый трудный случай — сложение 2 и 9. Рядом с каждым случаем сложения в таблице должен быть помещен соответствующий случай вычитания. Будем иметь следующую таблицу сложения и вычитания в пределах 20, которую читаем в таком порядке: 9 + 2, 11 − 2; 9 + 3, 12 – 3; 9 + 4, 12 – 4 и т. д.

9 + 2	9 + 3	9 + 4	9 + 5	9 + 6	9 + 7	9 + 8	9 + 9
11 – 2	12 – 3	13 – 4	14 – 5	15 – 6	16 – 7	17 – 8	18 – 9
8 + 3	8 + 4	8 + 5	8 + 6	8 + 7	8 + 8	8 + 9	
11 – 3	12 – 4	13 – 5	14 – 6	15 – 7	16 – 8	17 – 9	
7 + 4	7 + 5	7 + 6	7 + 7	7 + 8	7 + 9		
11 – 4	12 – 5	13 – 6	14 – 7	15 –8	16 – 9		
6 + 5	6 + 6	6 + 7	6 + 8	6 + 9			
11 – 5	12 – 6	13 – 7	14 – 8	15 – 9			
5 + 6	5 + 7	5 + 8	5 + 9				
11 – 6	12 – 7	13 – 8	14 – 9				
4 + 7	4 + 8	4 + 9					
11 – 7	12 – 8	13 – 9					
3 + 8	3 + 9						
11 – 8	12 – 9						
2 + 9							
11 – 9							

Умножение, деление по содержанию и деление на равные части. В отличие от первого десятка, сложение равных слагаемых в пределах второго десятка рассматривается особо, как новое действие *умножение*, связанное с особой терминологией и знаком. В связи с прямым действием, умножением, рассматривается и обратное действие, *деление*, его терминология и знак.

В пределах 20 заключена лишь небольшая часть таблиц этих действий. Точно также, специфические приемы этих действий здесь еще едва намечаются. Но все же первоначальные понятия этих действий закладываются уже при изучении второго десятка и заключаются прежде всего в уразумении конкретного смысла этих действий.

Проработка умножения в первом году обучения ведется на наглядных пособиях, на предметах. Дети фактически „берут“ 3 раза по 5 кружков, 5 раз по 4 спички и т. д. Вне этих образов, поясняющих смысл умножения, нет для детей

и самого действия умножения. Поэтому выражение *умножить на столько-то*, как лишенное конкретного содержания, непонятно детям на первых ступенях обучения и должно быть заменено выражением *взять по столько-то*.

То же относится и к делению. Выражением *разделить на столько-то не* следует пользоваться на первом году обучения. Разделить 15 на 3 это значит найти такое число, произведение которого на 3 равно 15. Деление в этом отвлеченном его понимании недоступно детям на первых ступенях обучения. В это время они могут либо *делить 15 по 3*, если даны произведение и множимое и надо найти множитель, либо *делить 15 на 3 равные части*, если даны произведение и множитель и надо найти множимое.

Например, если надо узнать, сколько конвертов ценою по 3 коп. можно купить на 15 коп., то, для решения этой задачи надо *15 коп. разделить по 3 коп.*

Если же известно, что 3 конверта стоят 15 коп. и требуется узнать цену одного конверта, то для решения этой задачи надо *15 коп. разделить на 3 равные части.*

Этим двум задачам на деление соответствуют *разные образы*. Чтобы достигнуть полной ясности понимания действий, которыми решаются эти задачи, учащиеся выполняют их на предметах. В первом случае они раскладывают 15 кружков, изображающих копейки, кучками, по 3 кружка в каждой кучке. Во втором случае они раскладывают 15 кружков в 3 кучки, поровну в каждой кучке. Учитель, у которого дети не различают этих двух задач на деление, а говорят просто „разделить на два, на три“ и т. д., навязывает детям деление в отвлеченном понимании этого действия и создает в понятии детей на месте этого действия пустоту.

Итак, мышление детей образно; двум разным задачам на деление соответствуют разные образы, а потому на первых ступенях обучения необходимо различать два вида деления: *деление по содержанию*, когда но произведению и множимому надо найти множитель, и *деление на равные части*, когда по произведению и множителю надо найти множимое.

Деление по содержанию правильнее было бы назвать делением на данные равные *части*, а деление на равные части — делением на данное *число* равных частей. Но эти названия многословны, а главное, их легко перепутать. Поэтому в дальнейшем мы будем придерживаться менее выдержанных с научной точки зрения, но более удобных в практическом отношении вышеупомянутых выражений.

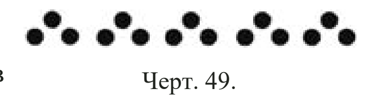
Вычислительные приемы умножения и деления в пределах второго десятка. Основным вычислительным приемом умножения в пределах 20 является прием *набирания, нанизывания* равных слагаемых. Другими словами, умножение выполняется при помощи сложения. В соответствии с этим,

деление по содержанию сводится к вычитанию равных чисел. Самый примитивный способ деления на равные части заключается в *раздавании или раскладывании* предметов по одному — процесс, в котором можно видеть зародыш распределительного свойства этого действия (стр. 25).

Подобно тому, как сокращенные приемы сложения и вычитания основаны на целесообразной группировке единиц, так сокращенные приемы умножения и деления опираются на целесообразную группировку слагаемых. Например, $2 \times 7 = 2 \times 5 + 2 \times 2$ или $18 : 2 = 10 : 2 + 8 : 2$. При вычислениях с небольшими числами эти приемы не могут играть большой роли. Полезно продемонстрировать их на наглядных пособиях с целью подготовить учащихся к усвоению на следующих ступенях курса распределительного свойства умножения и деления, но как способ нахождения произведения и частного в пределах 20 они едва ли пригодятся.

Переместительное свойство умножения далеко не так самоочевидно, как переместительное свойство сложения. Благодаря однородности слагаемых легко показать силу этого свойства для сложения на конкретных предметах. В умножении же, при конкретном множимом, множитель остается отвлеченным. Перестановка множимого на место множителя изменяет всю конкретную ситуацию, создает, в сущности, новую задачу. Потребовалось бы немало иллюстраций и арифметических работ, чтобы учащиеся осознали независимость произведения от места сомножителей. Поэтому в первом году не следует при вычислении произведения, например 3×5, основываться на перемещении сомножителей, т. е. на том, что 3×5 все равно, что 5×3.

Прием последовательного умножения, основанный на сочетательном свойстве этого действия, которое еще абстрактнее, чем переместительное свойство, в пределах второго десятка совсем не применяется.



Черт. 49.

При делении можно, вообще говоря, пользоваться специальными вычислительными приемами, вытекающими из основных свойств этого действия, но можно также опираться на связь между умножением и делением, как действием, обратным умножению. Например, 15 : по 3 = 5, так как $3 \times 5 = 15$. Точно также, 15 : на 5 = 3, так как $3 \times 5 = 15$. Такие случаи умножения и деления, как 3×5, 15 : по 3 и 15 : на 5, условимся называть *соответствующими.* Поясним это соответствие наглядно: представим произведение 3×5 в виде кружков, расположенных группами. *Этот же образ* поясняет, как мы видим, и соответствующие случаи деления, т. е. деление 15 по 3 и деление 15 на 5 равных частей.

Итак, в пределах второго десятка *умножение, в сущности, сводится к сложению, а деление — к умножению.* Остальные вычислительные приемы имеют второстепенное значение.

Способы построения таблицы умножения. Произведение любой пары чисел, не превышающее 20, должно быть в процессе вычислений усвоено наизусть. Совокупность этих произведений составляет *таблицу умножения*, которая может быть построена двумя способами: 1) по постоянному *множимому* и 2) по постоянному *множителю*. Так, например, можно число 3 умножить на 2, 3, 4, 5, 6 и можно, наоборот, все эти числа умножать на 3.

3×2	2×3
3×3	3×3
3×4	4×3
3×5	5×3
3×6	6×3

Рассмотрим оба эти способа с точки зрения основного вычислительного приема умножения — *нанизывания* слагаемых, которым будут пользоваться дети. Допустим, что, расположив элементы умножения по *первому* способу, мы взяли 2 раза по 3 и получили 6. Дальше уже нет необходимости начинать процесс набирания троек с самого начала. Чтобы составить сумму из трех троек, достаточно к шести прибавить три, чтобы составить сумму из четырех троек — к девяти прибавить три и т. д. Процесс последовательного набирания троек выразится следующими равенствами:

$$3 \times 2 = 3 + 3 = 6$$
$$3 \times 3 = 3 \times 2 + 3 = 6 + 3 = 9$$
$$3 \times 4 = 3 \times 3 + 3 = 9 + 3 = 12$$
$$3 \times 5 = 3 \times 4 + 3 = 12 + 3 = 15$$
$$3 \times 6 = 3 \times 5 + 3 = 15 + 3 = 18$$

Рассмотрим теперь *второй* способ построения таблицы — по постоянному множителю. Набираем 3 раза по 2; получается 6. Дальше надо набрать 3 раза по 3. Это совершенно новый случай, не имеющий никакого отношения к предыдущему: процесс набирания троек придется начинать с самого начала. Чтобы умножить на 3 число 4, придется заново набирать четверки, чтобы 5 взять 3 раза — забирать пятерки и т. д.

Таким образом, при *первом* способе построения таблицы умножения каждый последующий случай опирается на предыдущий, является его естественным продолжением. Благодаря этому не только легче набирать, „нанизывать“ слагаемые, но и группировать их, с целью сделать приемы вычисления более экономными. Так, набирая тройки для произведения 3×6, можно воспользоваться тем, что произведение 3×3 нами уже составлено. Достаточно сложить два таких произведения, чтобы получить искомое. При *втором* способе между последующим и предыдущим случаем умножения нет ничего общего. Целесообразнее поэтому располагать элементы умножения по *посто-*

янному множимому. Такое построение таблицы умножения выгоднее еще и в том отношении, что, начав с умножения двух на все однозначные числа, мы легко оправдаем в глазах детей переход от сложения к умножению. В самом деле, длинную запись 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12 выгодно заменить более короткой 2 × 6 = 12. Если же мы начнем с умножения всех однозначных чисел на 2, переход этот справедливо покажется им необоснованным, произвольным.

Способы построения таблицы деления. Каждому случаю умножения соответствуют два случая деления — деление по содержанию, если по произведению и множимому надо найти множитель, и деление на равные части, если по произведению и множителю отыскивается множимое.

Таким образом, в зависимости от построения таблицы умножения, будут располагаться по разному и соответствующие случаи деления. Например:

Первый способ.			**Второй способ.**		
3 × 2	6 : по 3	6 : на 2	2 × 3	6 : по 2	6 : на 3
3 × 3	9 : по 3	9 : на 3	3 × 3	9 : по 3	9 : на 3
3 × 4	12 : по 3	12 : на 4	4 × 3	12 : по 4	12 : на 3
3 × 5	15 : по 3	15 : на 5	5 × 3	15 : по 5	15 : на 3
3 × 6	18 : по 3	18 : на 6	6 × 3	18 : по 6	18 : на 3

Выше мы установили, что умножение следует располагать по постоянному множимому. Спрашивается, как вести в таком случае изучение деления? С чего начинать: с деления по содержанию или с деления на равные части? Изучать ли оба вида совместно или, наоборот, раздельно?

Прежде всего напомним важность совместного изучения прямых и обратных действий. Уясняя, путем совместного изучения, существующую между ними связь, мы с одной стороны, содействуем формированию основных понятий арифметических действий и тем повышаем математическое развитие учащихся, с другой стороны, облегчаем вычислительные операции и сокращаем труд по изучению таблиц арифметических действий.

Какой же вид деления прорабатывать совместно с умножением, если мы расположили его элементы по постоянному множимому? Очевидно, что это может быть только деление по содержанию. В самом деле, если бы мы захотели прорабатывать деление на равные части, то нам пришлось бы делить сначала на 2, затем на 3, на 4 и т. д., т. е. иметь дело с *разными* по трудности случаями деления. Если же мы этого не желаем, если, наоборот, мы считаем необходимым соединять в одну группу случаи деления, расположенные по *постоянному делителю,* нам придется, параллельно с умножением, например, трех прорабатывать деление *по* 3.

Преодолевать сразу две трудности, т. е. изучать оба вида деления одновременно, тем более нецелесообразно. Методисты, которые все же советуют прорабатывать совместно оба вида деления, рассуждают обычно таким образом. Воспользуемся переместительным свойством умножения. Тогда, умножая 3 на 5, можно параллельно делить 15 по 3, переставив же сомножители и умножая 5 на 3, можно тут же делить 15 на 3 равные части. Однако, не следует этого делать прежде всего потому, что на первом году обучения дети не могут еще свободно пользоваться переместительным свойством умножения (См. выше стр. 103). А затем остается в силе основное педагогическое требование — не ставить перед учащимся сразу двух новых трудностей, т. е. в данном случае усвоение понятий деления по содержанию и деления на равные части. Д. Л. Волковский дает совет, в виду того, что „дети весьма часто *смешивают деление на равные части с делением по содержанию*, рассматривать оба вида деления совместно, сравнивая их между собою“ (Арифметика в начальной школе. Методика целых чисел. Стр. 46). Невольно возникает вопрос: не потому ли в опыте Д. Л. Волковского дети смешивают два вида деления, что Д. Л. Волковский рекомендует рассматривать их совместно? Не лучше ли, вместо *сравнения, сопоставления* слабо усвоенных, смутных понятий, выбрать более соответствующий возрастным особенностям учащихся, более действительный путь для их прояснения — путь конкретизации каждого вида деления, широкого применения дидактического материала, и решения большого числа задач, путь сопоставления *не* двух видов деления, а деления по содержанию и умножения, деления по содержанию и вычитания, так как на первых порах смешение действий, особенно в случае выбора действия при решении задач, идет именно в этом направлении. *Раздельное* изучение деления по содержанию и деления на равные части, особенно на первых ступенях обучения, является как раз необходимым условием выработки ясных, отчетливых понятий каждого из этих видов деления. О сопоставлении и сравнении можно говорить гораздо позднее, когда первоначальный этап усвоения каждого вида деления в отдельности будет пройден.

Наконец, существует еще один вариант прохождения этих действий в пределах 20. Сначала изучают только одно умножение, расположив его элементы по постоянному *множимому*. Затем, перегруппировав эти элементы и расположив их по постоянному *множителю*, повторяют умножение и совместно с этим изучают деление на равные части. Такой способ расположения материала мотивируется тем, что в жизни дети чаще всего имеют дело с делением на равные части, что самый термин деления отождествляется с делением этого вида, и что поэтому деление на равные части усваивается легче, чем деление по содержанию, которое следует изучать позднее. В этих рассуждениях есть, несомненно, доля правды. Но с одной стороны, при правильной

постановке преподавания, когда деление по содержанию прорабатывается в тесной связи с умножением и с применением разнообразных наглядных пособий, оно не представляет тех трудностей, о которых говорят его противники. С другой стороны, если не изучать его при прохождении второго десятка, то когда и как это сделать? Связать с изучением первой сотни? Но на больших числах неудобно конкретизировать новое действие и все равно, волей-неволей, нам придется снова „спуститься" во второй десяток.

Таблица умножения и деления в пределах 20. Таким образом единственно правильным, с нашей точки зрения, является следующий порядок проработки умножения и деления в пределах 20: пройти умножение, расположив его элементы по постоянному *множимому,* и совместно с ним *деление по содержанию*. Затем повторить умножение, расположив его по постоянному *множителю*, и попутно проработать *деление на равные части*. Будем иметь следующую *таблицу умножения и деления в пределах 20:*

Умножение и деление по содержанию.

2 × 2	4 : по 2	3 × 2	6 : по 3
2 × 3	6 : по 2	3 × 3	9 : по 3
2 × 4	8 : по 2	3 × 4	12 : по 3
2 × 5	10 : по 2	3 × 5	15 : по 3
2 × 6	12 : по 2	3 × 6	18 : по 3
2 × 7	14 : по 2	4 × 2	8 : по 4
2 × 8	16 : по 2	4 × 3	12 : по 4
2 × 9	18 : по 2	4 × 4	16 : по 4
2 × 10	20 : по 2	4 × 5	20 : по 4
5 × 2	10 : по 5	6 × 2	12 : по 6
5 × 3	15 : по 5	6 × 3	18 : по 6
5 × 4	20 : по 5		
7 × 2	14 : по 7	9 × 2	18 : по 9
8 × 2	16 : по 8	10 × 2	20 : по 10

Умножение и деление на равные части.

2 × 2	4 : на 2	2 × 3	6 : на 3
3 × 2	6 : на 2	3 × 3	9 : на 3
4 × 2	8 : на 2	4 × 3	12 : на 3
5 × 2	10 : на 2	5 × 3	15 : на 3
6 × 2	12 : на 2	6 × 3	18 : на 3

7 × 2	14 : на 2	2 × 4	8 : на 4
8 × 2	16 : на 2	3 × 4	12 : на 4
9 × 2	18 : на 2	4 × 4	16 : на 4
10 × 2	20 : на 2	5 × 4	20 : на 4
2 × 5	10 : на 5	2 × 6	12 : на 6
3 × 5	15 : на 5	3 × 6	18 : на 6
4 × 5	20 : на 5		
2 × 7	14 : на 7	2 × 9	18 : на 9
2 × 8	16 : на 8	2 × 10	20 : на 10

Содержание концентра второго десятка. Итак, содержание концентра второго десятка сводится к следующему:

1. Счет и запись чисел до 20.
2. Сложение и вычитание до 20.
3. Умножение и деление до 20.
4. Состав чисел второго десятка.

При этом должны быть усвоены следующие понятия и навыки:

1. Понятие о десятичной группировке единиц в пределах 20.
2. Понятие умножения и деления в их конкретной форме: взять по столько-то, разделить по столько-то и разделить на столько-то равных частей.
3. Вычислительные приемы умножения и деления и интуитивное понимание взаимосвязи этих действий.
4. Навыки счета до 20, сложения и вычитания без перехода через десяток, сложения и вычитания с переходом через десяток, умножения и деления.
5. Знание наизусть таблиц арифметических действий в пределах 20.

Счет и запись чисел второго десятка.

Устная нумерация. Устная нумерация чисел второго десятка связана с появлением ряда новых слов. До сих пор, при назывании чисел первого десятка, дети имели дело со словами *простыми, коренными*. Теперь появляются слова *сложные, производные*. Название единиц в этих числительных, вопреки естественному порядку, стоит на первом месте, а название десятков — на втором. Сливаясь в одно слово, эти два названия теряют свою отчетливость, становятся мало понятными. Вот те трудности, которые придется преодолевать учащимся при изучении устной нумерации до 20.

Обыкновенно дети быстро и без помощи школы научаются считать до 20, т. е. называть по порядку все числа до 20. Но самостоятельно осмыслить эти названия они, разумеется, не могут. Понять их — это значить уяснить себе

десятичный состав чисел второго десятка. Этим и следует заняться в первую очередь.

Устная нумерация прорабатывается на палочках или спичках. Дети считают до 10, соединяют 10 спичек в пучек (при помощи резиновых колечек) и продолжают счет: десять и один, десять и два, десять и три, и т. д.

При изучении нумерации в пределах 20 значение десятка, как счетной единицы, не может быть выяснено с достаточной полнотой, но все же следует, наряду со словом десять, ввести слово *десяток* и напомнить детям, что некоторые вещи, например, яйца, яблоки и т. д. принято считать десятками. После этого, пересчитывая спички можно говорить: десяток и один, десяток и два, десяток и три и т. д. до десяток и десять или два десятка.

Следующий этап в изучении счета — изменение *порядка* слов применительно к филологическому составу числительных. Каждый ученик держит в левой руке на раскрытой ладони пучек из десяти спичек и, продолжая считать, кладет *на* этот пучек одну за другой отдельные спички: один *на* десять, два *на* десять, три *на* десять, и т. д. После этого учитель останавливается на каждом числе в отдельности и поясняет его название:

один — на — десять — одиннадцать
два — на — десять — двенадцать
три — на — десять — тринадцать и т. д.

Частица *дцать* в этих словах заменяет слово десять. Досчитав до двух десятков и связав второй десяток в пучок, дети называют полученное число „два-десять“ или короче „два-дцать“.

Затем проводятся упражнения двух родов:

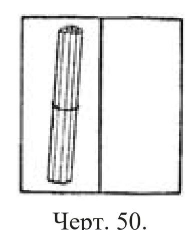
1. Учитель предлагает детям взять 1 десяток и 3 спички, 1 десяток и 7 спичек, 1 десяток и 5 спичек и т. д. и назвать каждое из этих чисел иначе: тринадцать, семнадцать, пятнадцать и т. д.

2. Учитель называет числа второго десятка, а дети изображают каждое из этих чисел при помощи пучка-десятка и отдельных спичек. Так прорабатывается десятичный состав каждого числа.

Закончить упражнения в устной нумерации можно отвлеченным счетом до 20 и ответом на вопросы: 1) какое число следует за числами 3, 13, 5, 15, 17, 18, 19? 2) Какое число находится перед числами 4, 14, 6, 16, 15, 18, 20? 3) Какое число находится между числами 1 и 3, 11 и 13, 4 и 6, 14 и 16, 7 и 9, 17 и 19? И т. д.

Письменная нумерация. Запись чисел второго десятка связана с вопросом о роли *места* при обозначении цифрами двузначного числа. Чтобы добиться более или менее сознательного отношения детей к записи таких чисел, можно поступить следующим образом.

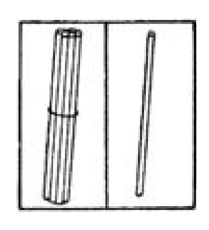
Дети получают небольшие квадратные карточки (стороны квадрата 4 — $4\frac{1}{2}$ *см*), разделенные пополам средней линией. *Направо* они начинают откладывать по одной спичке, пока не наберется 10 спичек. Десяток они связывают в пучок и перекладывают *налево*. Учитель рисует на доске то, что дети должны сделать у себя в тетради. Под рисунком он записывает число 10 так, чтобы цифра *один* пришлась под левой стороной карточки, где изображен 1 десяток, а *нуль* — под правой стороной (черт. 50). Тут впервые он разъясняет детям запись числа 10:



Черт. 50.

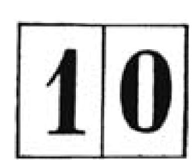
Налево пишут цифру 1; эта цифра показывает, что у нас один десяток. *Направо* пишут цифру 0; нуль показывает, что отдельных спичек нет.

Дети повторяют по наводящим вопросам объяснения учителя и пишут 10 под карточкой у себя в тетради.



Черт. 51.

Затем дети сдвигают карточку ниже, так, чтобы она закрыла запись, кладут направо одну спичку, записывают 11 (черт. 51); сдвигают карточку еще ниже, кладут направо вторую спичку, записывают 12 и т. д. Когда наберется второй десяток, дети связывают его в пучок, перекладывают налево и записывают 20. (Прием заимствован у Л. В. Глаголевой).



Черт. 52.

Полезно провести еще следующее упражнение. Число 10 записано в квадрате, разделенном пополам: единица отделена от нуля вертикальной чертой, чтобы резче подчеркнуть правую и левую сторону квадрата. Направо на место нуля, учащиеся кладут другие цифры, пользуясь разрезным дидактическим материалом. Полученные числа они читают, записывают, составляют из пучка-десятка и отдельных спичек.

Ко времени изучения нумерации в пределах 20 можно приурочить знакомство детей с серебряными монетами.

Сложение и вычитание в пределах второго десятка.

План изучения сложения и вычитания без перехода через десяток. К сложению без перехода через десяток, как уже указывалось (стр. 100), относится сложение двузначного числа с однозначным и однозначного числа с двузначным, когда сумма этих чисел не превышает 20. При этом нет необходимости изучать каждый случай отдельно, а изучаются вычислительные приемы, относящиеся к целой группе аналогичных случаев. Поэтому, намечая план работы, надо указать только *образцы* примеров каждой группы. Переме-

стительность сложения, с которой дети уже встречались при проработке первого десятка, в данном случае можно применить сразу. При изучении первого десятка, складывая числа 4 и 2, мы не считали возможным тут же рассматривать сложение чисел 2 и 4, так как для нас это были разные случаи сложения, к которым применялись разные вычислительные приемы. Лишь, дойдя в естественном порядке, т. е. в порядке постепенного нарастания трудности, до сложения 2 + 4, мы позволяли себе сопоставить случаи 2 + 4 и 4 + 2 и уже в дальнейшем опираться на переместительное свойство сложения. Что же касается таких случаев сложения, как 10 + 4 и 4 + 10 или 12 + 3 и 3 + 12, то их можно рассматривать непосредственно один за другим, так как здесь вычислительные приемы, в сущности, одинаковы: и в том, и в другом случае дело сводится лишь к знанию наизусть сумм и разностей в пределах 10 и к умению воспользоваться десятичной группировкой единиц.

Вычитание без перехода через десяток прорабатывается *совместно со сложением*. Каждой группе упражнений на сложение соответствует группа упражнений на вычитание. В данном случае связь между прямым и обратным действием выражается в том, что *прием* вычитания усваивается по аналогии с соответствующим приемом сложения. Например, если мы умеем складывать числа 12 и 3, 15 и 2, 14 и 4 и т. д., то тот же прием разложения двузначного на десятичные группы поможет нам от 17 отнять 3, от 16 отнять 4 и т. д.

На основании всего сказанного можно наметить следующий *план* изучения внетабличного сложения и вычитания или, что то же, сложения и вычитания без перехода через десяток:

1)	10 + 2	10 + 5	10 + 6	и т. д
	13 − 3	14 − 4	17 − 7	„
2)	3 + 10	5 + 10	7 + 10	„
	12 − 10	16 − 10	18 − 10	„
3)	12 + 3	13 + 5	15 + 4	„
	16 − 2	17 − 4	18 − 3	„
4)	2 + 15	3 + 14	5 + 12	„
	16 − 14	18 − 13	19 − 15	„
5)	16 + 4	18 + 2	13 + 7	„
	20 − 3	20 − 5	20 − 8	„
6)	3 + 17	5 + 15	2 + 18	„
	20 − 16	20 − 14	20 − 11	„

Иногда четвертую группу примеров относят на самый конец из-за вычитания (16 − 14, 18 − 13 и т. д.), которое представляется более трудным, чем два последующих вычитания. Решить этот вопрос с полной непререкаемостью

можно было бы лишь путем постановки соответствующих опытов. Особенно серьезного значения такое перемещение, во всяком случае, не имеет.

Вычислительные приемы внетабличного сложения и вычитания. Рассмотрим каждую из шести намеченных ступеней внетабличного сложения и вычитания отдельно.

1) **10 + 6; 14 − 4.** Примеры этого рода непосредственно примыкают к нумерации чисел второго десятка и особых пояснений не требуют. Пособием для конкретизации этого случая сложения и вычитания могут служить, как и при изучении нумерации, пучок, составленный из 10 спичек или палочек, и отдельные палочки или спички.

2) **6 + 10; 14 − 10.** Чтобы помочь детям сложить 6 и 10, достаточно показать, что 6 + 10 = 10 + 6. Что касается вычитания, то оно основано на знании десятичного состава числа 14. Дети должны рассуждать примерно так: от 14 отнять 10, получится 4, так как 14 состоит из десяти и четырех.

3) **12 + 3; 16 − 2.** Складывая числа 12 и 3, дети должны понимать, что *три* прибавляется к *двум* и затем десяток соединяется с *пятью*. Отнимая 2 от 16, они должны научиться отнимать *два* от *шести*, не трогая десятка. Чтобы конкретизировать такого рода сложение и вычитание, можно отложить двузначные числа 12 и 16 на классных счетах или изобразить их при помощи спичек или квадратиков. На одной проволоке десяток шариков, на другой — 2 или 6 шариков; в длинной полоске 10 квадратиков, а рядом в короткой — 2 или 6 квадратиков; в пучке 10 спичек, да еще 2 или 6 спичек. Тогда при сложении 12 и 3 станет ясно, куда отнести 3, а при вычитании двух из шестнадцати — как сбросить 2. Пояснить эти вычислительные приемы помогают также группы специально подобранных примеров:

а)	3 + 2	12 + 2	13 + 3	б)	5 − 3	17 − 2	15 − 3
	13 + 2	12 + 4	11 + 3		15 − 3	17 − 4	18 − 3
	4 + 2	12 + 7	15 + 3		8 − 3	17 − 5	14 − 3
	14 + 2	12 + 5	16 + 3		18 − 3	17 − 3	16 − 3

4) **3 + 12; 17 − 14.** Сложение 3 и 12 выполняется на основании перестановки слагаемых; вычислительный прием остается по существу тем же, что и в предыдущем случае. Вычитание (17 − 14) выполняется на наглядных пособиях — классных счетах, спичках. Учитель откладывает на счетах 10 шариков на одной проволоке и 7 на другой. Сначала он сбрасывает 10 шариков на первой проволоке, а затем от 7 отнимает 4. Дети выполняют тот же прием на спичках: от пучка-десятка и 7 спичек отнимают сначала 1 десяток, а затем еще 4 спички от 7 спичек. И в этом случае уместны группы аналогичных примеров:

а) 4 + 2	3 + 15	2 + 14	б) 16 − 2	19 − 12	16 − 13
4 + 12	3 + 12	4 + 14	16 − 12	19 − 14	17 − 13
7 + 2	3 + 14	3 + 14	18 − 2	19 − 15	18 − 13
7 + 12	3 + 16	5 + 14	18 − 12	19 − 16	19 − 13

5) **16 + 4; 20 − 3.** Чтобы сложить 16 и 4, надо сначала сложить 6 и 4, получается десять, десяток. Десяток да еще десяток, всего два десятка или 20. Пояснить сложение можно на палочках или спичках, которые удобно *связать* в пучок, когда при сложении образуется полный десяток. Вычитание точно также необходимо произвести фактически, на спичках. При этом один из двух десятков придется *развязать* и взять из 10 спичек 3 спички. Здесь, как и в предыдущих случаях, дети учатся пользоваться десятичным составом числа. Что же касается вычислений, как таковых, то ничего нового по сравнению с первым десятком они не представляют.

6) **4 + 16; 20 − 17.** Составление суммы чисел 4 и 16 ничем не отличается от составления суммы чисел 16 и 4. Что касается вычитания, то оно прорабатывается на палочках или спичках: один из двух десятков сбрасывается целиком, а другой приходится развязать и из десяти спичек взять 7 спичек.

Подготовительные упражнения к сложению и вычитанию с переходом через десяток. Способ сложения двух однозначных чисел, сумма которых больше десяти, состоит в том, что первое слагаемое дополняется до 10, а к полученному десятку прибавляются оставшиеся единицы. Чтобы подвести детей к этому способу сложения и аналогичному способу вычитания, можно задавать им следующие вопросы:

Сколько надо добавить к 8, чтобы получить 10?

К какому числу надо добавить 3, чтобы получить 10?

Сколько надо отнять от 16, чтобы получить 10?

Сколько надо добавить к 10, чтобы получить 16? И т. д.

Те же вопросы можно задать в виде примеров с вопросительным знаком: 7 + ? = 10, 17 − ? = 10 и т. д.

Полезно решать примеры такого рода:

1) 7 + 3 + 5
14 − 4 − 2

2) 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2
20 − 2 − 2 − 2 − 2 − 2 − 2 − 2 − 2 − 2

3) 2 + 4 + 4 + 4 + 4
18 − 4 − 4 − 4 − 4

4) 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3
19 − 3 – 3 − 3 − 3 − 3

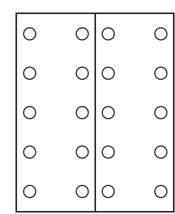
Такие упражнения помогают детям быстро находить дополнение каждого однозначного числа до 10 и разность между каждым двузначным числом второго десятка и десятью.

План изучения сложения и вычитания с переходом через десяток. После подготовительных упражнений можно перейти к изучению второй и последней части таблицы сложения и вычитания — к сложению и вычи-

танию с переходом через десяток. План проработки этого отдела курса определяется таблицей сложения и вычитания (на стр. 101), которая заключает в себе все суммы однозначных чисел, превышающие число 10, и все соответствующие разности. Усвоение этих сумм и разностей происходит на основе вычислений, которые многократно повторяются и приводят, в конце концов, к запоминанию таблицы сложения и вычитания наизусть. После проработки таблицы все усвоенные суммы и разности группируются по *числам* второго десятка и в таком порядке еще раз повторяются. Таким образом учащиеся приобретают ясное представление о *составе каждого числа* в концентре 20.

Вычислительные приемы сложения и вычитания с переходом через десяток. Прием сложения удобнее всего проработать на счетной таблице с двуцветными кружками. Каждый учащийся получает наруки квадратный кусок картона, разделенный средней линией пополам. С каждой стороны на этом квадрате намечено кружками по 10 мест.

Пусть надо сложить числа 8 и 7. На левой стороне таблицы дети закрывают 8 мест черными кружками. Сколько всего кружков может поместиться в левой части таблицы? спрашивает учитель. Иначе: сколько надо добавить к 8, чтобы получилось 10? Учащиеся отвечают на этот вопрос, кладут 2 красных кружка на левую сторону таблицы и записывают: 8 + 2 = 10.

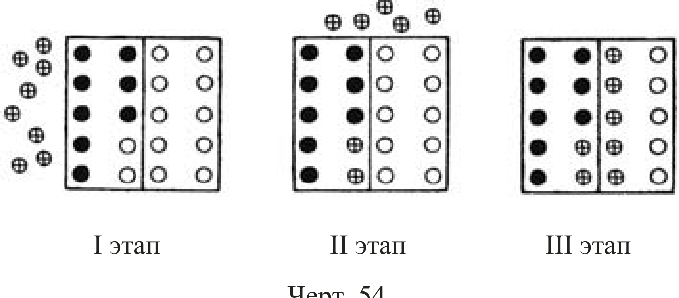


Черт. 53.

Затем учитель спрашивает:

Сколько всего красных кружков надо прибавить к черным кружкам? Сколько красных кружков мы *уже* прибавили? Как узнать, сколько *еще осталось* прибавить красных кружков?

Учащиеся отвечают на эти вопросы и записывают то, что ими фактически выполнено: 7 − 2 = 5.



I этап II этап III этап

Черт. 54.

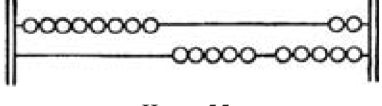
Остается к десяти прибавить 5. Дети закрывают 5 мест на правой стороне таблицы красными кружками и записывают в тетради: 10 + 5 = 15. Чтобы они яснее представили себе весь вычислительный процесс, учитель предлагает им

то, что они сделали, записать *в строчку.* В окончательном виде, в соответствии с этапами размещения кружков на таблице и заключительным обобщением, запись в тетрадях учеников должна иметь следующий вид:

$$8 + 2 = 10$$
$$7 - 2 = 5$$
$$10 + 5 = 15$$

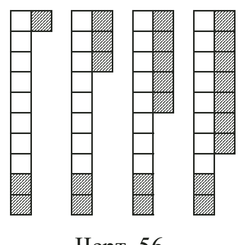
$$8 + 2 + 5 = 15$$
$$8 + 7 = 15$$

Тот же прием можно пояснить при помощи классных счетов. На верхней проволоке 8 шариков. Чтобы прибавить к ним 7 шариков, прибавляем сначала 2 шарика, оставшихся на верхней проволоке, а затем еще 5 шариков, которые приходится отложить на второй проволоке (черт. 55).



Черт. 55.

Прием сложения с переходом через десяток можно пояснить и при помощи „столбиков“ из двуцветных квадратиков. Эти столбики дети могут складывать из разрезного дидактического материала или рисовать у себя в тетрадях (черт. 56).



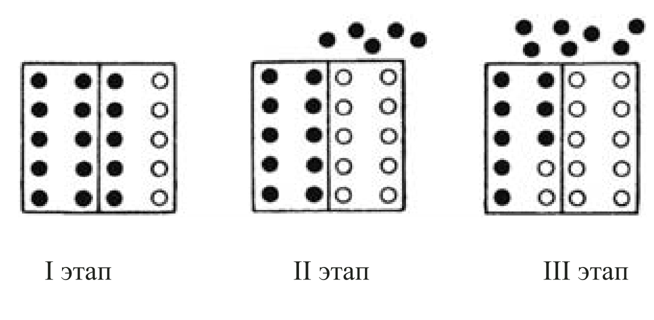
Черт. 56.

Следует подчеркнуть, что для первого знакомства с вычислительным приемом такого сложения следует выбирать не самый легкий случай, т. е. не 9 + 2, с которого начинается таблица, а случай потруднее, например, 8 + 7. Прибавить к девяти два дети сумеют без всяких специальных приемов, просто путем присчитывания по одному, тогда как при сложении 8 и 7 прибавлять по одному очень долго, и целесообразность прибавления группами вполне очевидна.

Вычислительный прием вычитания, сходный с приемом сложения, прорабатывается на тех же наглядных пособиях, в частности, на той же счетной таблице (черт. 57). При вычитании целесообразнее пользоваться одноцветными кружками. Чтобы осмыслить прием вычитания 7 из 15, учащиеся откладывают на своих таблицах по 15 черных кружков. Затем ставится вопрос: сколько надо отнять от 15, чтобы получилось 10? Благодаря удобному размещению кружков на таблице, дети без труда отвечают на этот вопрос, снимают 5 кружков и записывают: 15 − 5 = 10. Сколько *всего* кружков надо отнять от 15 кружков? Сколько кружков мы *уже* отняли? Как узнать, сколько кружков

еще осталось отнять? Вот вопросы учителя, на которые дети должны ответить, чтобы потом записать: 7 − 5 = 2. Остается от десяти отнять 2. Учащиеся снимают по 2 кружка с левой стороны таблицы и записывают: 10 − 2 = 8.

Следующие рисунки поясняют этапы работы с кружками:



I этап II этап III этап

Черт. 57.

В соответствии с этими этапами появится следующая запись на доске и в тетрадях учеников.

$$
\begin{array}{r}
15 - 5 = 10 \\
7 - 5 = 2 \\
10 - 2 = 8 \\
\hline
15 - 5 - 2 = 8 \\
15 - 7 = 8
\end{array}
$$

Приемы вычитания можно пояснить и на классных счетах. На верхней проволоке отложено 10 шариков, на нижней 5 шариков. От 15 надо отнять 7. Сбросим сначала 5 шариков, которые лежат на нижней проволоке. Тогда останется сбросить еще 2 шарика с верхней проволоки.

Те части таблицы, в которых второе слагаемое больше первого, могут выполняться путем перестановки слагаемых. Так, если дети уже знают, что 8 + 3 = 11, то вместо прибавления восьми к трем, они могут прибавить три к восьми. Пояснить это можно на двуцветных квадратиках или кружках, как было сделано по отношению к сложению в пределах 10. (Стр. 92).

Уменье пользоваться переместительным свойством сложения значительно сократит труд на изучение второй части таблицы. Из 36 сумм надо будет запомнить только 20. А так как вычитание выполняется в конце концов на основе сложения, то главное внимание придется направить всего только на эти 20 случаев сложения.

Повторение таблицы сложения и вычитания и запоминание ее наизусть. Таблицу сложения и вычитания следует прорабатывать неторопливо, так как она должна быть усвоена памятью. Изучая новые части таблицы, надо повторять пройденное. По мере изучения отдельных частей таблицы, следует вывешивать эти части одну за другой на стене в классе. Таблица будет иметь такой вид:

1

9 + 2 = 11	11 − 2 = 9
9 + 3 = 12	12 − 3 = 9
9 + 4 = 13	13 − 4 = 9
9 + 5 = 14	14 − 5 = 9
9 + 6 = 15	15 − 6 = 9
9 + 7 = 16	16 − 7 = 9
9 + 8 = 17	17 − 8 = 9
9 + 9 = 18	18 − 9 = 9

2

8 + 3 = 11	11 − 3 = 8
8 + 4 = 12	12 − 4 = 8
8 + 5 = 13	13 − 5 = 8
8 + 6 = 14	14 − 6 = 8
8 + 7 = 15	15 − 7 = 8
8 + 8 = 16	16 − 8 = 8
8 + 9 = 17	17 − 9 = 8

3

7 + 4 = 11	11 − 4 = 7
7 + 5 = 12	12 − 5 = 7
7 + 6 = 13	13 − 6 = 7
7 + 7 = 14	14 − 7 = 7
7 + 8 = 15	15 − 8 = 7
7 + 9 = 16	16 − 9 = 7

4

6 + 5 = 11	11 − 5 = 6
6 + 6 = 12	12 − 6 = 6
6 + 7 = 13	13 − 7 = 6
6 + 8 = 14	14 − 8 = 6
6 + 9 = 15	15 − 9 = 6

5

5 + 6 = 11	11 − 6 = 5
5 + 7 = 12	12 − 7 = 5
5 + 8 = 13	13 − 8 = 5
5 + 9 = 14	14 − 9 = 5

6

4 + 7 = 11	11 − 7 = 4
4 + 8 = 12	12 − 8 = 4
4 + 9 = 13	13 − 9 = 4
3 + 8 = 11	11 − 8 = 3
3 + 9 = 12	12 − 9 = 3
2 + 9 = 11	11 − 9 = 2

Пользуясь этим пособием, можно проводить с детьми ритмическое чтение отдельных частей таблицы. (См. стр. 90).

1. Для лучшего запоминания таблицы можно пользоваться следующими группами специально подобранных примеров. Примеры на взаимосвязь между вычитанием и сложением:

а) 8 + 5　　б) 5 + 8　　в) 7 + 5 − 5
13 − 5　　13 − 8　　13 − 4 + 4

2. Группы „аналогичных“ упражнений:

а) 7 + 3	б) 14 − 4	в) 6 + 4	г) 10 − 5
7 + 5	14 − 5	7 + 4	11 − 5
7 + 6	14 − 6	8 + 4	13 − 5
7 + 7	14 − 8	9 + 4	14 − 5

Этой же цели могут служить разные игры: лото, магические квадраты, волчок (см. стр. 168).

Состав чисел второго десятка из слагаемых. Чтобы состав чисел второго десятка, а вместе с тем и таблица сложения и вычитания были лучше усвоены, необходимо еще раз повторить все суммы однозначных чисел, превышающие 10, и все соответствующие разности, расположив их *по числам* второго десятка. Вот для образца набор упражнений, характеризующих состав числа 11:

9 + 2	8 + 3	7 + 4	6 + 5
11 − 2	11 − 3	11 − 4	11 − 5
2 + 9	3 + 8	4 + 7	5 + 6
11 − 9	11 − 8	11 − 7	11 − 6

Полезно выяснять состав чисел в пределах 20 и при помощи примеров с вопросительным знаком. Вот образцы таких примеров:

а) 9 + ? = 11	б) ? + 9 = 12
8 + ? = 11	? + 8 = 12
7 + ? = 11	? + 7 = 12
6 + ? = 11	? + 6 = 12
в) 11 − ? = 9	г) ? − 3 = 9
11 − ? = 8	? − 4 = 8
11 − ? = 7	? − 5 = 7
11 − ? = 6	? − 6 = 6

Умножение и деление по содержанию в пределах 20.

Общие замечания. Материал данного раздела намечается таблицей умножения и деления по содержанию (стр. 107). В этой таблице элементы умножения расположены по постоянному *множимому,* а элементы деления — по постоянному делителю.

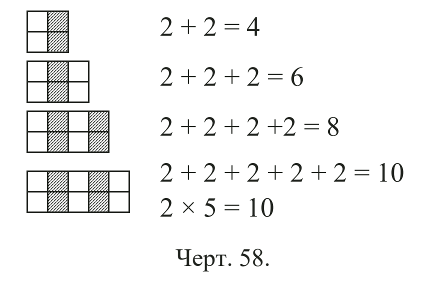
В первом году обучения, когда понятия детей об арифметических действиях образны, запись умножения 3 × 5 = 15 дети читают так: по 3 взять 5 раз, получится 15; а запись деления 15 : 3 = 5 они читают так: 15 разделить по 3, получится 5 раз по 3. Усвоение конкретного смысла умножения деления составляет первую задачу данного раздела.

Основной прием умножения в пределах 20 — это *нанизывание*, *набирание* равных слагаемых, деление же выполняется главным образом на основе умножения. Вот почему изучение каждой группы табличных упражнений следует начинать, с так называемого, *счета равными группами*, т. е. счета парами, тройками, четверками и т. д. Подобно тому, как основной прием сложения — прием присчитывания по одному — можно уподобить восхождению по ступенькам числовой лестницы, так и здесь мы имеем восхождение по числовому ряду, как по лестнице, с тою только разницей, что теперь эта лестница круче, а восхождение стремительнее.

В процессе вычислений у учащихся начинают формироваться понятия об основных свойствах умножения и деления и о взаимосвязи между этими действиями. Многократные повторные упражнения завершаются усвоением на память результатов умножения и деления в пределах 20, иначе говоря, знанием наизусть таблицы этих действий.

Усвоение смысла и записи умножения и деления по содержанию. Необходимость особого термина и особого знака для действия умножения устанавливается в связи с уяснением на наглядных пособиях смысла этого действия.

Учитель раздает детям по несколько черных и желтых квадратиков. Каждый учащийся должен *взять* 2 желтых квадратика и наклеить их у себя в тетради наверху слева один под другим; затем *взять* 2 черных квадратика и наклеить их рядом с желтыми. Чтобы удобнее было руководить работой детей, учитель на доске делает то же, что дети в тетрадях. Рядом с квадратиками учитель и дети записывают: 2 + 2 = 4. Сколько раз мы *взяли* по 2 квадратика? спрашивает учитель. Сколько всего квадратиков мы наклеили? Затем учитель сам берет и детям предлагает *взять* по 2 желтых, по 2 черных и еще по 2 желтых квадратика, наклеить их, как показано на рисунке, и записать: 2 + 2 + 2 = 6. Запись эту дети читают так: два да два — четыре; четыре да два — шесть. Сколько раз мы взяли по 2 квадратика? Сколько всего квадратиков мы наклеили? опять спрашивает учитель. Таким же способом наклеивают дети 4 раза и 5 раз по 2 квадратика. Когда набрано 5 двоек, и дети убедились, что на такую запись и на ее чтение (два да два — четыре, четыре да два — шесть, шесть да два — восемь, восемь да два — десять) требуется много времени, учитель объясняет, что прочитать и записать то же самое можно короче. Сколько раз мы взяли по 2 квадратика? Сколько получилось



Черт. 58.

квадратиков? спрашивает учитель и дети отвечают на эти вопросы полным ответом: *по 2 квадратика мы взяли 5 раз, получилось 10 квадратиков.* Теперь остается записать эту фразу. Учитель повторяет раздельно: по 2 — взять — 5 раз — получится 10, и под длинной записью на доске пишет числа 2, 5 и 10, оставляя между ними небольшие промежутки. Покажите, где я записал *по два*, спрашивает он. Где надо записать *взять*? Где записано *5 раз*? Где надо записать *получится*? Где записано *десять*? Дети отвечают на эти вопросы, учитель же показывает новый знак — косой крестик, который заменяет слово *взять* или *повторить*. После этого дети записывают у себя в тетради: 2 × 5 = 10, а затем заменяют длинную запись более короткой и в предыдущих примерах.

Начав с самой длинной записи, чтобы оправдать в глазах детей ее замену более короткой, мы заканчиваем самой короткой записью — суммой двух слагаемых, которую тоже можно записать в виде произведения. Здесь уместно поставить перед детьми вопросы: всегда ли возможна такая запись? Когда именно она возможна? Учитель предлагает детям положить перед собой отдельно 2 спички, 1 спичку и 3 спички и спрашивает: сколько всего спичек вы взяли? Как это узнать? Как записать? Дети записывают: 2 + 1 + 3 = 6. Поровну ли спичек в каждой кучке? продолжает спрашивать учитель. Можно ли записать эту строчку короче? Почему нельзя этого сделать? Дети объясняют, что короче можно было бы записать этот пример только в том случае, если бы спичек в каждой кучке было поровну, а у нас спички разложены не поровну.

Смысл и запись действия деления также поясняется на наглядных пособиях — на квадратиках, кружках или палочках, которые дети раскладывают по 2.

Учитель предлагает одному из учеников взять 8 яблок (из бумаги) и разделить их товарищам, по 2 яблока каждому. Сколько человек получит яблоки? ставит вопрос учитель. Ученик раздает яблоки по 2, говоря: даю одному 2 яблока, *другому* 2. Всего я роздал 4 яблока. *Третьему* 2 яблока, роздано 6 яблок. *Четвертому* 2 яблока. Розданы все 8 яблок.

Учитель подытоживает: если 8 яблок раздать по 2 яблока, то получат яблоки 4 человека. Иначе-говоря: *8 яблок разделить по 2 яблока, получится 4 раза по 2.*

Чтобы подвести учащихся к записи этой фразы, учитель предлагает детям еще раз повторить ее раздельно: 8 разделить по 2 — получится 4 и записывает на доске 8, по 2 и 4, оставляя между числами небольшие промежутки. Покажите, где я записал 8, спрашивает он. Где надо записать *разделить*? Где записано *по* 2? и т. д. Затем он показывает детям новый знак — две точки, который заменяет слово *разделить*. После этого дети записывают у себя в тетрадях: 8: по 2 = 4.

Очень важно, изучая деление, подчеркивать его связь с умножением. Процесс деления по 2 сопровождается, как мы видели, своего рода проверкой, которая ведется попутно с делением. Даем одному 2 яблока, *другому* 2. *Всего* дали 4 яблока. *Третьему* 2 яблока, роздано *6 яблок*. *Четвертому* 2 яблока, роздали *8 яблок* и т. д. Проверка сводится к тому, что, деля предметы по 2, мы умножаем 2 на 2, на 3, на 4 и т. д. пока не найдем искомый множитель. (Вспомним, что в делении по содержанию — по произведению и множимому отыскивается множитель.)

Умножение двух и деление по два в пределах 20. Выяснив смысл и запись умножения на числах первого десятка, следует закончить умножение двух на 6, 7, 8, 9 и 10, чтобы повторными упражнениями в новом действии закрепить связанные с ним понятия и навыки. Только после этого вводится деление по содержанию, выясняется смысл этого действия и его запись (см. выше), после чего прорабатывается деление по 2 всех чисел второго десятка.

Умножение двух на 6, 7, 8, 9 и 10 опирается на счет двойками до 10. С упражнений в этом счете и следует начать изучение этих случаев умножения. Далее, опираясь на усвоенное уже произведение 2 × 5, можно применить сокращенный прием „набирания“ слагаемых, основанный на их группировке. Так, чтобы набрать 6 двоек, мы берем сначала 5 двоек и прибавляем еще одну двойку; чтобы набрать 7 двоек, набираем 5 двоек и еще 2 двойки и т. д. При помощи двуцветных квадратиков, которые дети подсчитывают на рисунке или, еще лучше, раскладывают у себя на столе, этот прием конкретизируется, поясняется. Но он пригоден и в том случае, когда предметов нет налицо, когда они существуют только в нашем воображении или когда вычисления производятся над отвлеченными числами. Дети рассуждают так: чтобы по 2 взять 7 раз, возьмем 5 раз по 2, получим *полный десяток*, затем еще 2 раза по 2, получим 4, а всего 14.

Черт. 59.

Полезно давать детям в качестве самостоятельной работы упражнения на замену длинной записи более короткою и наоборот:

2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12   2 × 6 = 12

2 × 7 = 14   2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 14

При решении задач необходимо строго различать места множимого и множителя. Необходимо также при множимом и произведении ставить наименования. Множитель, как число отвлеченное, пишется всегда без наименования. (О решении задач на умножение см. стр. 156.)

Следует помнить, что, изучая умножение 2-х, дети впервые знакомятся с новым действием, его фразеологией и знаком. Необходимо добиться полной

ясности в понимании этих новых вопросов и некоторой беглости в вычислении, прежде чем переходить к делению.

Усвоив на числах первого десятка смысл и запись деления, переходим к делению по 2 чисел второго десятка. Зная, что 10 : по 2 = 5, дети могут применить сокращенный прием деления, рассуждая, примерно, так: 14 кружков (или квадратиков, или спичек и т. д.) состоят из десятка и 4 кружков. В полном десятке — 5 пар, в 4 кружках — 2 пары, а всего — 7 пар. Однако, при небольших числах, с которыми приходится иметь дело в концентре 20, дети чаще всего будут находить частное, как это указывалось выше, путем проб. Производя деление, ученик подбирает число групп, иначе говоря, *задается частным*, проверяя затем предположенное число умножением. Благодаря этому усваивается понятие о связи деления с умножением и не приходится затрачивать труд на механическое усвоение таблицы деления.

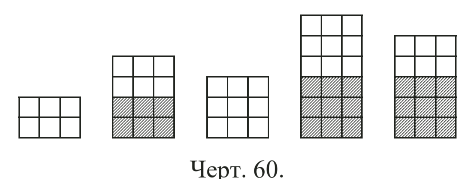
Таким образом, прорабатывая деление по 2, мы должны научить детей: 1) раскладывать предметы в группы, по 2 предмета в каждой группе; 2) раскладывая предметы в группы, рассуждать так, чтобы в дальнейшем обходиться без пособий; 3) пользоваться при вычислении частного таблицей умножения.

О решении задач на деление по содержанию см. стр. 157.

Умножение трех и деление по три. Эту группу упражнений начинаем, по общему правилу, со счета тройками на предметах. Глядя на прямоугольники, составленные из квадратиков, или, еще лучше, раскладывая квадратики по 3, дети считают тройками, а затем находят произведения трех на 2 и 4, на 3 и 6 и на 5.

Раскладывая квадратики и вычисляя, дети подробно рассказывают все что они делают:

По 3 квадратика взять 2 раза, получится 6 квадратиков. По 3 квадратика взять 4 раза: по 3 возьму 2 раза, получу 6; 6 да 6, будет 12. По 3 взять 4 раза, будет 12.



Черт. 60.

По 3 квадратика взять 3 раза, будет 9 квадратиков.

По 3 квадратика взять 6 раз: по 3 взять 3 раза, будет 9; 9 да 9, получится 18. По 3 взять 6 раз, будет 18 и т. д.

Когда дети пройдут несколько раз подробно таблицу умножения трех, в дальнейшем, сначала глядя на прямоугольники, а затем и без прямоугольников, они могут говорить сокращенно:

По 3 взять 2 раза, будет 6.

По 3 взять 4 раза: (тихо) 6 да 6, (громко) 12.

По 3 взять 3 раза, будет 9.

По 3 взять 6 раз: (тихо) 9 да 9, (громко) 18.

Деление по 3, согласно установленному порядку, прорабатывается сначала на предметах. Раскладывая квадратики или кубики по 3, дети находят, что

6 состоит из 2 троек, 12 — из 4 троек и т. д. Рассуждение, которым сопровождается работа с наглядными пособиями, сводится в основном к следующему: 6 разделить по 3, будет 2 раза по 3, так как 3 да 3 будет 6; 12 разделить по 3, будет 4 раза по 3, так как по 3 взять 4 раза будет 12 и т. д. Другими словами, чтобы разделить 6, 12, 15 и т.д. по 3, дети задаются частным и проверяют его сложением или умножением.

Дальнейшая проработка таблицы умножения и деления. Запоминание таблицы наизусть. Умножение четырех и деление по четыре можно прорабатывать после умножения трех и деления по три, но можно также сблизить эту группу табличных упражнений с умножением двух и делением по 2, так как счет четверками, с которого следует начать эти упражнения, опирается на счет парами. Чтобы от счета парами перейти к счету четверками, достаточно, считая парами, произносить первое число без ударения, второе — с ударением, третье — снова без ударения и т. д., а затем числа без ударения не произносить совсем. Таким образом выделяются числа кратные четырех:

2, **4,** 6, **8,** 10, **12,** 14, **16,** 18, **20.**

На основе счета четверками, который проделывается на предметах, переходим к умножению четырех и делению по четыре чисел 8, 12, 16 и 20. Умножение производим на основе сложения, а деление — на основе умножения.

Можно тут же рассмотреть умножение восьми и деление по восемь, так как числа 8 и 16 встречаются в том же двоичном ряду, что и числа, кратные четырех.

Некоторые методисты советуют после умножения и деления парами переходить сразу к умножению пяти и делению по 5. Эта точка зрения вполне приемлема. Счет пятками применяется в быту и не затрудняет детей, так как опирается на знание ими состава числа 10. Поэтому после умножения и деления парами можно с одинаковым успехом заниматься умножением четырех и делением по четыре или умножением пяти и делением по пять.

Умножением шести, семи, девяти и десяти и соответствующими случаями деления заканчивается проработка таблицы умножения и деления. Язык, которым дети характеризуют эти действия, остается все время образным: *взять по столько-то* и *разделить по столько-то*. Отвлеченные выражения *умножить на* и *разделить на* не вводятся. Тем более неуместно было бы употреблять выражения *дважды три, трижды пять* и т. д., так как условный смысл этих выражений детям еще непонятен.

Проследим теперь процесс усвоения наизусть таблицы умножения. Возьмем для примера произведение 3 × 6 = 18.

Сначала дети учатся вычислять произведение 3 × 3, складывая тройки: 3 + 3 + 3. Это сложение выполняется сперва медленно, затем все скорее и скорее: про себя — три, шесть, громко — девять. Наконец, фраза по *три взять три раза — девять* усваивается памятью.

Вычисляя произведение 3 × 6, дети сперва делают это медленно: по 3 взять 3 раза — 9, еще по 3 взять три раза — 9; 9 да 9 будет 18. Встречаясь при решении задач и примеров снова и снова с произведением 3 × 6, дети производят вычисления все быстрее и быстрее: по 3 взять 3 раза, будет 9, да еще 9 — всего 18. Наконец, фраза *по 3 взять 6 раз — 18* запоминается наизусть.

О запоминании наизусть таблицы деления сказано дальше, после рассмотрения деления на равные части. Но уже и здесь, при изучении деления по содержанию, видно, как процесс нахождения частного постепенно механизируется, обращается в навык.

Умножение и деление на равные части в пределах 20.

Общие замечания. Материал данного раздела намечается таблицей умножения и деления на равные части (стр. 107 и 108). В этой таблице элементы умножения расположены по постоянному *множителю*, и в соответствии с этим располагается по постоянному делителю деление на равные части. Здесь речь идет не об изучении заново умножения, а лишь о повторении этого действия при новой группировке его элементов, с тем чтобы на основе уже известных детям произведений они учились находить частное.

Деление на равные части дети воспринимают в это время еще, как особое действие, имеющее иной смысл, чем деление по содержанию, и связанное с другой фразеологией. Запись 15 : 3 = 5 они теперь читают так: 15 разделить на 3 равные части, получится в каждой части по 5. Здесь было бы еще рано сопоставлять деление 15 на 3 равные части с делением 15 по 3. Наоборот, изучая деление на равные части, надо подбирать задачи с таким расчетом, чтобы в них встречался только данный вид деления, а примеры на деление, которые дети будут решать в это время, они должны читать по указанному выше образцу: 15 разделить *на 3 равные части*, 12 разделить *на 4 равные части* и т. д. Только закончив проработку этого отдела и занимаясь повторением состава числа, можно допустить при решении отвлеченных примеров употребление детьми образных выражений, соответствующих *обоим* видам деления. Но и в этом случае речь идет не о сближении или сопоставлении обоих видов деления, а лишь об их сосуществовании в практике учащихся.

Последовательность в изучении умножения и деления на равные части не вполне совпадает с последовательностью таблицы: за делением на 2 равные

части удобно сразу проработать деление на 4 равные части, затем на 3 и на 6 равных частей и, наконец, подряд все остальные случаи.

Усвоение смысла и записи деления на равные части. Конкретный смысл выражений *разделить на 2, на 4 равные части* и т. д., следует пояснить на дидактическом материале и на небольших числах, в пределах 10.

Простейший прием деления на равные части, в котором можно видеть зародыши распределительного свойства деления, заключается в следующем. Ученик берет столько предметов, сколько указано частей, и делит их по одному; затем берет еще столько же предметов, делит их по одному и т. д., пока у него ничего не останется. Так как в это время дети уже довольно хорошо знают состав чисел в пределах 20 из множителей, то они легко могут найти частное и без вычислений. Но тогда специфика деления на равные части, в отличие от деления по содержанию, может остаться незамеченной, неосознанной ими. Чтобы этого не случилось, дети вначале не должны знать *числа* предметов, которые им предстоит разделить, раздать поровну. Тогда им поневоле придется воспользоваться указанным выше приемом раздачи предметов по одному. Применяя этот прием, надо попутно вскрывать связь между делением на равные части и умножением и в дальнейшем, при нахождении частного, опираться уже исключительно на эту связь.

На столе у учителя 8 кружков. Не зная числа кружков, ученик должен раздать эти кружки двум своим товарищам поровну. Даем каждому по одному кружку. Всего роздали 2 кружка. Даем по *второму* кружку, роздано всего 4 кружка, так как 2 да 2 — четыре. Даем по *третьему* кружку. Роздали 6 кружков, так как 3 да 3 будет 6. Даем, наконец, по *четвертому* кружку. Всего роздали 8 кружков, так как 4 да 4 будет 8.

На первых порах, особенно при делении на 2 равные части, дети склонны пояснять деление не умножением, а сложением. Это вполне естественно и законно, но понемногу учитель должен натолкнуть детей на замену сложения умножением. Вместо того, чтобы говорить: 4 да 4 будет 8, как можно сказать иначе, спрашивает учитель и получает ответ: по 4 взять 2 раза, получится 8. В заключение учитель ставит наводящий вопрос: Итак, 8 кружков разделить на 2 равные части, сколько получится в каждой части? Дети отвечают полным ответом: *8 разделить на 2 равные части, в каждой части получится по 4*. Учитель на доске, а учащиеся в тетрадях записывают — 8: на 2 = 4. По указанному образцу дети делят 9 кружков на 3 равные части, 10 кружков — на 5 равных частей и т. д., причем делимое им заранее неизвестно. В процессе деления здесь еще яснее, чем раньше, обозначается роль умножения: если 10 разделить на 5 равных частей, в каждой части получится по 2, так как по 2 взять 5 раз, будет 10.

Таким образом дети усваивают смысл, терминологию, прием и запись деления на равные части для чисел *первого десятка.*

Проработка таблицы деления на равные части. Запоминание таблицы наизусть. Выяснив смысл и запись деления на равные части на числах первого десятка, можно перейти к делению всех чисел в пределах 20 на 2 и на 4 равные части.

При делении на 2 равные части чисел, больших десяти, можно воспользоваться уменьем детей разделить на 2 равные части полный десяток. Так, чтобы разделить пополам 14 орехов, можно сначала разделить 10 орехов пополам, получим в каждой части по 5 орехов, и еще 4 ореха пополам, получим 2 ореха, а всего 7 орехов. Но во всех этих случаях чаще всего дети будут опираться на знание ими состава чисел из множителей: 20 разделить на 4 равные части, будет в каждой части по 5, так как по 5 взять 4 раза, будет 20.

Все остальные случаи деления на равные части, а именно: деление на 3 и на 6, на 5, 7, 8, 9 и 10 равных частей выполняются и подавно на основе умножения, так как другие приемы здесь мало пригодны. В конечном счете дело сводится к тому же, что и при делении по содержанию. Решая задачу или отвлеченный пример на деление, ученик подбирает частное, или, как говорят иначе, задается частным, проверяя затем предположенное число умножением. Например, при делении 18 на 3 равные части, ученик рассуждает так: если положить в каждую часть по одному, по два, по три, наверное будет мало. Положу в каждую часть по четыре. По 4 взять 3 раза—12; тоже мало. Положу в каждую часть по 5; по 5 взять три раза —15; положу по 6. По 6 взять 3 раза —18. Значит, 18 разделить на 3 равные части, будет в каждой части по 6. Разница между делением по содержанию и делением на равные части сводится к следующему: в первом случае ученик подбирает *число групп*, а во втором — *число единиц в каждой группе.*

После достаточных упражнений ученик научается все быстрее подбирать частное, все вернее его угадывать. В конце концов, деление сводится к механическому „переводу“ языка деления на язык умножения и обратно. Фраза — 18 разделить на 3 равные части, получится в каждой части по 6, так как по 6 взять 3 раза, будет 18 — становится такой же привычной, как перед этим, при проработке умножения, стала привычной ее вторая часть.

Состав чисел второго десятка из множителей. После прохождения таблицы умножения и деления полезно все числа второго десятка пройти одно за другим, рассматривая состав каждого числа из равных слагаемых. Вот образцы вопросов, относящихся к числу 12:

Сколько раз надо взять по 2, по 3, по 4, но 6, чтобы получить 12?

Какое число надо взять 2 раза, 3 раза, 4 раза, 6 раз, чтобы получить 12?

Сколько пар, троек, четверок, шестерок в 12?

Число разделили на 3 равные части, в каждой части получили по 4. Какое это число? Число разделили на 2 равные части, в каждой части получили по 6. Какое это число? И т. д.

На сколько равных частей надо разделить 12, чтобы в каждой части получить по 2, по 3, по 4, по 6?

Из каких одинаковых монет можно составить число 12?

Нарисуй 12 кружков рядами, поровну в каждом ряду. Как это можно сделать?

Реши примеры:

12 : по 2	12 : на 2	12 : по 6	12 : на 6
2 × 6	6 × 2	6 × 2	2 × 6
12 : по 3	12 : на 3	12 : по 4	12 : на 4
3 × 4	4 × 3	4 × 3	3 × 4

Нечетные числа и даже простые числа, как 11, 17 и 19 дети также учатся составлять различным образом из меньших чисел. Так, можно спросить учащихся, сколько пар, сколько троек и т. д. в числе 11? в числе 17? Из каких монет можно составить эти числа? Можно также предложить детям решить следующие группы примеров:

Число 11.		***Число 17.***		
2 × 5 + 1	4 × 2 + 3	2 × 8 + 1	4 × 4 + 1	6 × 2 + 5
3 × 3 + 2	5 × 2 + 1	3 × 5 + 2	5 × 3 + 2	7 × 2 + 3

Килограмм и литр.

Изучая второй десяток, дети знакомятся впервые с измерением веса и вместимости. Было бы ошибочно думать, что рисунки, изображающие весы, гири, литровую кружку, ведро, бутылку, могут служить наглядными пособиями при изучении мер. Рисунок может дать лишь некоторое представление об их внешнем виде. Но изобразить на рисунке *вес* килограмма или *вместимость* литра, конечно, невозможно. Вот почему изучение килограмма и литра совершенно необходимо связать с рассмотрением подлинных образцов этих мер, с действительными измерениями веса или вместимости. Речь в данном случае идет не столько об измерении, сколько об *отмеривании*, как это было и при знакомстве с метром.

При измерении *веса* совершенно необходимо познакомить детей с гирей в 1 килограмм. Что касается остальных гирь, то желательно иметь под рукой 2 *кг* и 5 *кг*. Гиря в 10 *кг* тяжела для детей. Об ее существовании достаточно сказать им на словах. Дети отвешивают на весах 1 *кг* картофеля, хлеба, соли, опилок. При одинаковом весе вещи могут занимать неодинаковое место и на-

оборот. Эти упражнения сопровождаются приблизительным взвешиванием небольших тяжестей на руке, а также лепкой из глины комков весом в 1 *кг*.

При измерении *вместимости* необходимо иметь под рукою литровую кружку или бутылку. Дети сравнивают вместимость литра и ведра. При помощи литровой кружки они наполняют ведро водой и устанавливают, что в него входит 12 литров. Затем литр сравнивают со стаканом. Надо подобрать такой стакан, который вмещал бы ровно 250 кб. *см*, что составляет четверть литра. Наполняя литр стаканом, дети непосредственно убеждаются, что в литре 4 стакана.

В связи с измерением килограммом и литром дети решают задачи на меры веса и вместимости.

ПЕРВАЯ СОТНЯ.

Цель и содержание концентра первой сотни.

Целесообразность выделения первой сотни в особый концентр. Первая сотня выделяется в особый концентр на основании следующих соображений:

1. В системе разрядных единиц за десятком — этой первой сложной счетной единицей — следует сотня, которая составлена из десятков так, как десяток составлен из простых единиц. В пределах первой сотни более полно, чем в пределах второго десятка, раскрывается сущность десятичной группировки единиц и принцип поместного значения цифр (стр. 15). Таким образом, первая сотня есть своего рода ключ к уразумению устной и письменной нумерации многозначных чисел.

2. Умножение многозначных чисел сводится к умножению всех однозначных чисел попарно. Деление многозначных чисел в соответствии с этим сводится к делению двузначного числа на однозначное при однозначном частном. Совокупность всех этих случаев умножения и деления составляет *таблицы* этих действий. Наибольшее произведение двух однозначных чисел — 81. Таким образом таблица умножения, а следовательно и деления целиком заключается в пределах первой сотни. Для возможно быстрого выполнения действий, таблицы действий надо знать наизусть. Отсюда необходимость специального изучения первой сотни, как отдельной главы курса начальной арифметики.

3. В пределах первой сотни шире развертываются вычислительные приемы сложения и вычитания, связанные с расчленением двузначных чисел на составляющие их десятичные группы. Здесь же мы встречаем впервые и, так называемые, внетабличные приемы умножения и деления, при которых, наряду с таблицами этих действий, приходится пользоваться десятичным

составом чисел первой 128 сотни. Эти вычислительные приемы являются необходимой ступенью в изучении механизмов действий над многозначными числами. Таким образом и с этой стороны первая сотня заслуживает быть выделенной в особый концентр.

Содержание концентра первой сотни на первом году обучения. Содержание концентра первой сотни в целом является некоторым подобием всего курса начальной арифметики в его основных чертах. Овладеть материалом этого концентра во всем его многообразии на первом году обучения, разумеется, невозможно. Здесь изучается только небольшая часть вопросов, относящихся к первой сотне, а именно:

1. Устная и письменная нумерация до 100.
2. Действия над круглыми десятками.
3. Сложение и вычитание без перехода через десяток (простейшие случаи). [1]

При изучении нумерации первой сотни приходится иметь дело с числами двух родов. К первой группе относятся все двузначные числа, т. е. числа, состоящие из десятков и единиц. Ко второй группе относятся так называемые *круглые десятки*, т. е. числа, состоящие только из десятков. Числа этой второй категории заслуживают внимания в том отношении, что на них дети учатся пользоваться десятком как счетной единицей и тем самым приближаются к усвоению понятия о сложной счетной единице вообще. В то же время действия над круглыми десятками, являясь повторением действий над однозначными числами, без труда усваиваются детьми на первом году обучения. Вот почему принято после нумерации первой сотни изучать действия над круглыми десятками.

В виду существующего у некоторых преподавателей увлечения круглыми десятками, необходимо подчеркнуть, что изучение первой сотни следует начинать не с них, а именно с устной и письменной нумерации в пределах 100. Взятые вне натурального числового ряда, круглые десятки будут представляться детям как однозначные числа с наименованиями: 5 десятков то же, что 5 пучков или 5 цепочек, словом, 5 каких-то предметов. Не умея считать по одному в пределах данного круглого числа, не умея заполнить при помощи счета тех промежутков, которые существуют между двумя соседними круглыми числами, ребенок будет представлять себе эти числа как бы непосредственно следующими одно за другим. Пресловутая легкость вычислений над круглыми десятками окажется чисто внешней: слепо руководствуясь аналогией, дети механически переносят на круглее десятки то, что они усвоили при изучении концентра десяти. Вот почему следует сначала создать у детей

[1] Этот случай сложения и вычитания может быть перенесен на второй год обучения.

отчетливые числовые представления в пределах 100 на основе натурального числового ряда, а уже затем переходить к действиям над круглыми десятками.

При изучении действий над круглыми десятками, а также сложения и вычитания двузначных чисел, дети остаются по-прежнему в сфере образных представлений, которые находят соответствующие отражения в языке. Выражения: прибавить, отнять, взять по столько-то, разделить по столько-то и на столько-то равных частей — по-прежнему заменяют существующие в арифметике термины действий.

При изучении сотни вводятся выражения *на столько-то больше* и *на столько-то меньше*. Таким образом уже на первом году исчерпываются основные задачи на сложение (стр. 243). Разностное сравнение прорабатывается позднее, на втором году обучения. Поэтому вопрос об основных задачах на вычитание остается на первом году недоработанным.

Все случаи сложения и вычитания в пределах сотни могут быть разделены на две группы: 1) *сложение и вычитание без перехода через десяток*, требующие знания таблиц этих действий только в пределе 10 и 2) *сложение и вычитание с переходом через десяток*, к которым применяются таблицы в полном объеме.

Внутри первой группы можно сделать еще одно подразделение: 1) *простейшие случаи* сложения и вычитания без перехода через десяток, когда сумма единиц слагаемых меньше десяти (24 + 3; 35 + 22 и т. д.) и число единиц уменьшаемого больше числа единиц вычитаемого (28 − 2; 57 − 25 и т. д.) и 2) *дополнение до круглых десятков,* когда сумма единиц слагаемых *равна* десяти (24 + 6; 37 + 23 и т. д.) и уменьшаемое — *круглое число* (30 − 5; 50 − 27 и т. д.).

На первом году (в грамотном первом классе) могут быть проработаны только *простейшие случаи сложения и вычитания без перехода через десяток.*

Нумерация в пределах первой сотни.

Устная нумерация. Ко времени изучения первой сотни дети обычно уже умеют считать до 100. Этот полусознательный счет опирается на однообразную последовательность слов в каждом десятке, которую дети легко подмечают, но которой пользуются механически. Об этом свидетельствуют те затруднения, которые возникают у детей при переходе от одного десятка к другому. Дойдя до таких чисел, как 29, 39, 49 и т. д., они останавливаются, или же считают так: двадцать девять, двадцать десять, двадцать одиннадцать и т. д. Особенно трудно назвать число „сорок“ после тридцати девяти и „девяносто“ после восьмидесяти девяти, т. к. они не похожи на остальные названия круглых десятков.

Чтобы научиться сознательно считать до 100, дети должны понять, что однообразие счета, делающее его столь легким, зависит от десятичной группировки единиц. Поэтому счет надо вести на таких наглядных пособиях, которые позволяли бы попутно конкретизировать десятичный состав двузначных чисел. Такими пособиями могут быть спички, монтессоровские „цепочки“ и, наконец, лента длиною в 100 сантиметров. Познакомимся с употреблением каждого из этих пособий. Начнем со спичек или палочек.

1. Предметный счет до 100. На столе перед каждым учащимся имеются в достаточном для счета количестве спички или палочки. Дети считают до десяти и связывают десяток. Продолжают считать до двадцати и связывают второй десяток. Считают спички (или палочки) дальше: двадцать один, двадцать два, двадцать три и т. д., пока не дойдут до двадцати девяти. Берут еще одну спичку или палочку и устанавливают, что снова набрался полный десяток. Связывают этот десяток в пучок. Теперь у нас *три десятка, тридесять или тридцать*, подобно тому, как раньше мы имели два десятка, двадесять или двадцать.

Остановившись таким образом на трех десятках и пояснив образование слова тридцать, продолжаем счет, пока не наберется четвертый десяток. Четыре десятка имеют совсем особое название, непохожее на все остальные — *сорок*. Это название приходится просто запомнить. Связав в пучок четвертый десяток, продолжаем по тому же образцу считать дальше. Останавливаемся на всех круглых числах и достигаем, наконец, *десяти десятков,* о которых дети должны знать, что они составляют *одну сотню* или *сто*.

2. Раздробление десятков в единицы и превращение единиц в десятки. После счета до 100, надо остановиться на круглых десятках, так как они представляют собою то существенно новое, с чем дети должны освоиться. Перед детьми — спички, связанные ими только что в пучки-десятки. Учитель предлагает показать и назвать иначе 2 десятка, 3 десятка, 5 десятков, 4 десятка и т. д. (раздробление). Дети показывают 3 пучка и говорят *тридцать*, 5 пучков — и говорят *пятьдесят* и т. д. Обратное упражнение: учитель называет числа тридцать, пятьдесят, сорок, шестьдесят и т. д., предлагает составить их из пучков — десятков и сказать, сколько в каждом из них десятков (превращение). Дети отвечают: тридцать — это 3 десятка, шестьдесят — это 6 десятков и т. д.

Прежде чем переходить к следующей группе упражнений, надо ввести новый термин, с которым дети еще незнакомы. Когда мы считаем предметы — спички, палочки и т. д., каждый предмет можно назвать *единицей*. Вместо того, чтобы говорить: 1 десяток и 5 спичек, можно сказать: 1 десяток и 5 единиц. Вместо того, чтобы сказать: 2 десятка и 7 палочек, можно говорить: 2 десятка и 7 единиц.

3. Изучение десятичного состава двузначных чисел. Подобно предыдущим, эти упражнения также можно разбить на 2 группы: а) образование двузначного числа из десятков и единиц и б) разложение двузначного числа на десятки и единицы. Первая группа упражнений связана с *раздроблением* десятков в единицы, вторая — с *превращением* единиц в десятки.

Таким образом эти упражнения вытекают из предшествующих упражнений, являются их продолжением.

Учитель предлагает детям показать 2 десятка и 6 единиц. Дети показывают 2 пучка спичек и 6 отдельных спичек. Как назвать это число иначе? Спрашивает учитель. Ответ: двадцать шесть. Учитель продолжает задавать вопросы: как назвать иначе 3 десятка и 7 единиц? 4 десятка и 5 единиц? и т. д. Дети показывают 3 пучка-десятка и 7 спичек, 4 пучка-десятка и 5 спичек, называя эти числа тридцать семь, сорок пять и т. д.

Обратное упражнение: учитель называет числа двадцать четыре, сорок восемь, тридцать два и т. д., предлагает составить их из пучков-десятков и отдельных спичек и сказать, сколько в каждом из них десятков и единиц. Составив каждое из этих чисел из пучков и отдельных спичек, дети отвечают: двадцать четыре состоит из 2 десятков и 4 единиц; сорок восемь состоит из 4 десятков и 8 единиц и т. д.

4. Отвлеченный счет до 100. Упражнение в отвлеченном счете, т. е. в счете без пособий, служит своего рода повторением и проверкой пройденного. Оно должно показать, насколько дети овладели образными представлениями чисел первой сотни, насколько сознательно переходят они при счете от числа к числу, особенно в тех случаях, когда заканчивается один десяток и начинается другой. В это время дети должны уметь ответить на следующие вопросы: а) какое число следует за числом 29, 39, 49 и т. д.; б) какое число находится перед числом 40, 30, 50 и т. д.; в) какое число находится между числами 59 и 61, 78 и 80 и т. д.; г) между какими числами стоит число 40, 69, 90 и т. д.

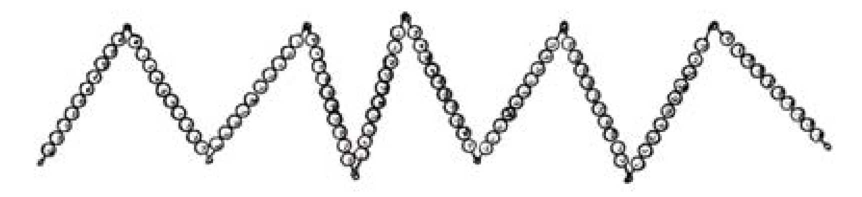
Если бы оказалось, что без наглядных пособий некоторые вопросы, касающиеся десятичного состава чисел первой сотни или их места в натуральном числовом ряду, еще затрудняют учащихся, необходимо возвращаться к первоисточнику — к работе с дидактическим материалом, до тех пор, пока не будет достигнута полная уверенность в ответах.

Необходимо подчеркнуть, что конкретизация счета на первом году обучения должна быть *безусловной*. Если единицы мы обозначаем при помощи спичек, то десяток должен быть представлен пучком из 10 спичек; если единицы мы обозначаем шариками, то десяток должен быть представлен цепочкой из 10 шариков и т. д. Было бы преждевременно уже в это время вводить

условные обозначения, например, изображая единицы розовыми кружками, представлять десяток *одним* голубым кружком, или, изображая единицы кружками, изображать десяток *одним* квадратиком и т. п. Правда, чтобы дети научились смотреть на десяток, как на счетную единицу, они должны воспринять его, как *одно целое*. Вот почему важно *связывать* спички в *пучки, соединить* шарики в *цепочки*. Но преждевременная условность в обозначении десятка может внести сбивчивость, неясность в детские представления и потому не должна применяться.

Обратимся теперь к рассмотрению других пособий, конкретизирующих счет, — цепочек, сантиметровых полосок и др.

Преимущество цепочек заключается в том, что цепь ста, составленная из цепочек десятков, одинаково удобна, как для счета по одному, так и для счета десятками (черт. 61).



Черт. 61

Связав спички в пучки, ребенок уже не видит натурального ряда чисел, не видит *места* круглых десятков в этом ряду. Дети, которые пользовались в качестве пособия только спичками или палочками, труднее усваивают переход при счете от одного десятка к другому. Цепочки в этом отношении нагляднее.

Самое лучшее, если дети сами нанижут цепь ста. Для этой цели можно воспользоваться деревянными шариками, размоченным в воде горохом, хлебными шариками и т. п. Границу между десятками можно обозначить при помощи картонных кружков. Процесс нанизывания, замедляя счет, содействует усилению внимания к каждому его шагу. Нанизав все 100 шариков, дети уже тем самым значительно продвинутся вперед в овладении навыком сознательного счета.

В отношении последовательности упражнений цепь ста используется совершенно так же как и спички.

Заменить цепочки могут с успехом сантиметровые ленты, которые учитель приготовляет из миллиметровой бумаги. Каждая лента должна быть шириною в 1 *см* и длиною в 100 *см*. Учащиеся раскрашивают квадратные сантиметры через один, причем для первого десятка пользуются, например, красным карандашом, для второго — синим, потом снова красным и т. д. Сантиметровую ленту можно наклеить на более широкую бумажную полосу,

что позволит резче обозначить границу между двумя соседними десятками (черт. 62). В это время дети еще не знают названия мер — дециметр, сантиметр; метр, составленный из 10 полосок, разделенных каждая на 10 равных частей, будет служить не только пособием к изучению нумерации, но и подготовкой к усвоению метрических мер.

Кроме спичек, палочек и других наглядных пособий, которые находятся на руках у учащихся, прекрасным пособием для изучения нумерации являются классные счеты. Следует только помнить, что и в этом случае недопустимо прибегать к условному обозначению десятка при помощи *одного* шарика на второй проволоке. Сотню следует изображать при помощи 10 десятков шариков, по 10 шариков на каждой проволоке.

Все, что дети делают на своем счетном материале, учитель предварительно поясняет на классных счетах. Таким совместным применением демонстрационного и лабораторного методов достигается наибольшая эффективность преподавания.

Черт. 62.

Письменная нумерация. Если дети умеют составить двузначное число из десятков и единиц и разложить его на десятки и единицы, то запись и чтение таких чисел уже не представят трудности, тем более что опыт записи двузначных чисел второго десятка учащиеся уже имеют. Необходимо напомнить детям, что число десятков записывают *слева*, а число единиц *справа*. С этой целью удобно воспользоваться счетной табличкой, разделенной средней линией пополам, набором спичек и разрезных цифр. Работа протекает следующим образом:

Десятки	Единицы

1. Запись чисел. Учитель называет по разрядам какое-нибудь двузначное число, например, 3 десятка 5 единиц. Учащиеся составляют его из пучков-десятков и отдельных спичек. Пучки кладут на *левую* сторону таблички с надписью “десятки”, а отдельные спички на *правую* сторону с надписью „единицы“. Под десятками они кладут цифру 3, а под единицами цифру 5, называют число словами: *тридцать пять* и записывают его цифрами у себя в тетрадях.

Наряду с двузначными числами учитель вводит и круглые десятки, например, 5 десятков. Дети составляют это число из пучков-десятков, которые кладут на левую сторону таблицы; правая сторона остается при этом пустой. Под десятками они кладут цифру 5, а под пустой правой стороной таблицы — нуль. Полученное число называют и записывают цифрами.

После этого можно диктовать детям числа и не по разрядам, называя их прямо „пятьдесят шесть", „двадцать восемь", „семьдесят" и т. д. Дети должны мысленно разложить эти числа на десятки и единицы и записать слева число десятков, справа — число единиц или нуль, если единицы в числе отсутствуют.

10 десятков или 100 записывают так: пишут десять и рядом нуль, который показывает, что единиц в этом числе нет.

2. Чтение чисел. По предложению учителя дети кладут на левую сторону таблички цифру 6, на правую — цифру 4.

Вопросы:	*Ответы:*
Что показывает цифра 6?	6 десятков.
Что показывает цифра 4?	4 единицы.
Как иначе назвать 6 десятков?	Шестьдесят.
Как прочитать все число?	Шестьдесят четыре.

Среди других упражнений встретится и такое: на левую сторону таблички дети кладут цифру 4, а на правую сторону 0.

Вопросы:	*Ответы:*
Что обозначает цифра 4?	4 десятка.
Что показывает нуль?	Что в этом числе нет единиц.
Как прочитать это число?	Сорок.

Проработку нумерации первой сотни полезно связать с разменом рубля на гривенники и копейки. Пользуясь тем, что дети хорошо знакомы с этими монетами, можно с их помощью конкретизировать десятичный состав чисел в пределах 100.

Действия над круглыми десятками.

Общие замечания. Рассматривать действия над круглыми десятками как особую ступень курса арифметики, равносильную основным его ступеням, не следует. Во-первых, как уже указывалось, нельзя брать круглые десятки вне сотни в целом. Во-вторых, некоторые случаи умножения и деления по своей трудности переносятся на второй год. Поэтому нельзя относиться к действиям над круглыми десятками как к отдельной законченной части курса. Наконец, те действия, которые прорабатываются на первом году обучения, даются детям настолько легко, что было бы нецелесообразно уделять им много времени и внимания.

На первом году обучения изучаются сложение и вычитание круглых десятков и наиболее легкие случаи умножения и деления.

На следующих примерах можно видеть, как распределяются случаи умножения и деления круглых десятков между первым и вторым годами обучения:

Первый год:	*Второй год:*
10 × 6 = 60	6 × 10 = 60
60 : по 10 = 6	60 : по 6 = 10
60 : на 6 = 10	60 : на 10 = 6
20 × 4 = 80	4 × 20 = 80
80 : по 20 = 4	80 : по 4 = 20
80 : на 4 = 20	80 : на 20 = 4

Легко заметить, что все те случаи, которые отнесены к первому году обучения, не требуют разрушения десятка: пучки спичек не придется развязывать, цепочки не пришлось бы распускать. Наоборот, случаи, которые отнесены на второй год, связаны с составлением десятков и с их разрушением. Умножение 6 на 10 есть один из табличных случаев умножения, а умножение 4 на 20 — один из внетабличных случаев. Те и другие разрабатываются в соответствующем месте курса второго года обучения. То же самое можно сказать и о делении.

Сложение и вычитание круглых десятков. Сложение и вычитание круглых десятков, с одной стороны, является повторением сложения и вычитания в пределах первого десятка, с другой стороны, здесь приходится иметь дело с раздроблением десятков в единицы и превращением единиц в десятки.

Подготовительные упражнения заключаются в следующем. Дети знают, что 4 + 2 = 6. Отсюда они заключат, что 4 десятка + 2 десятка = 6 десятков. Раздробляя десятки в единицы, они находят, что 40 + 20 = 60. Точно так же учащиеся умеют вычислить разность 7 − 3 = 4. Отсюда не трудно заключить, что 7 десятков − 3 десятка = = 4 десятка. Раздробляя десятки в единицы, они находят, что 70 − 30 = 40.

После ряда таких упражнений детям уже не трудно будет решать примеры на сложение и вычитание круглых десятков.

Пусть надо вычислить сумму 50 + 30. Рассуждаем так: 50 — это 5 десятков, 30 — это 3 десятка. Сложить 5 десятков и 3 десятка — все равно, что сложить 5 и 3. Но 5 + 3 = 8. Значит 5 десятков да 3 десятка будет 8 десятков, т. е. 80. А потому 50 + 30 = 80. Точно так же выполняется вычитание. Пусть надо вычислить разность 80 − 20. Рассуждаем так: 80 — это 8 десятков, 20 — это 2 десятка. От 8 десятков отнять 2 десятка — это все равно, что от 8 отнять 2. Но 8 − 2 = 6. Значит, 8 десятков − − 2 десятка = 6 десятков. А потому 80 − 20 = 60.

Сложение и вычитание круглых десятков можно начать с прибавления и отнимания по 10, а затем складывают и вычитают любые круглые числа в пределах 100.

Пособием при сложении и вычитании могут служить пучки спичек или палочек, бумажные полоски, содержащие по 10 квадратиков, цепочки. Учитель, давая необходимые разъяснения, как всегда, широко пользуется классными счетами.

Умножение и деление круглых десятков. Упражнения в умножении и делении круглых десятков можно разбить на 3 группы:

1. Умножение десяти на все числа первого десятка и *деление по 10* всех круглых десятков до 100 включительно. Эти упражнения являются непосредственным продолжением проработки нумерации круглых десятков и никаких специальных пояснений не требуют.

2. Умножение чисел 20, 30, 40 и 50 на однозначное в пределах 100 и деление по 20, по 30, 40 и по 50 круглых десятков до 100 включительно. Эти упражнения основаны на тех же приемах, которыми мы пользовались при сложении и вычитании круглых десятков.

Подготовительные упражнения заключаются в переходе от умножения и деления чисел первого десятка к умножению и делению круглых десятков. Дети знают, что 3 × 3 = 9. Отсюда 3 десятка × 3 = 9 десятков. Но 3 десятка это 30, а 9 десятков это 90. Значит 30 × 3 = 90. Точно также, зная, что 9 : по 3 = 3, легко понять, что 9 десятков: по 3 десятка = 3. Но 9 десятков это 90, а 3 десятка это — 30. Значит 90 : по 30 = 3.

После этих подготовительных упражнений можно умножать и делить круглые десятки, рассуждая следующим образом. Пусть надо по 20 взять 4 раза. Мы знаем, что 20 — это 2 десятка. По 2 десятка взять 4 раза будет 8 десятков или 80. А потому 20 × 4 = 80. Точно также, если надо 80 разделить по 20, вспоминаем, что 80 — это 8 десятков, а 20 — это 2 десятка. Но 8 десятков разделить по 2 десятка будет 4 раза по 2 десятка. А потому 80 : по 20 = 4.

3. Деление круглых десятков на равные части при однозначном делителе. Сюда же относится деление 100 на 10 равных частей.

В этой группе упражнений можно различать примеры двух родов:

а) *Частное равно десяти*. В этом случае деление прямо вытекает из знания нумерации. В самом деле, чтобы разделить 30 на 3 равные части или 70 на 7 равных частей, достаточно вспомнить, что 30 состоит из 3 десятков, а 70 – из 7 десятков; значит в каждой части будет по одному десятку.

б) *Частное равно нескольким десяткам.* В этом случае, как и раньше, опираемся на деление в пределах первого десятка. Так как 9 : 3 = 3, то и 9 десятков разделить на 3 равные части, будет по 3 десятка в каждой части, т. е. 30. А следовательно 90: на 3 = 30. Отсюда, если надо 80 разделить на 4 равные части, рассуждаем так: 80 это 8 десятков. Если 8 десятков разделить на 4 равные части, получится в каждой части по 2 десятка, т. е. по 20. А потому 80 : на 4 = 20.

При умножении и делении чаще, чем при сложении и вычитании придется прибегать к помощи наглядных пособий — тех же пучков спичек или палочек, полосок из квадратиков или цепочек. Учитель по-прежнему может пользоваться классными счетами.

Простейшие случаи сложения и вычитания без перехода через десяток. Проработку этого раздела сложения и вычитания можно вести в такой последовательности:

1)	20 + 5	30 + 7	50 + 4	и т. п.;	28 − 8	45 − 5	32 − 2	и т. п.
2)	4 + 20	6 + 40	5 + 30	„	26 − 20	38 − 30	54 − 50	„
3)	23 + 2	42 + 4	64 + 3	„	27 − 3	37 − 4	59 − 5	„
4)	5 + 24	4 + 43	2 + 35	„	37 − 32	58 − 53	49 − 42	„
5)	25 + 20	32 + 40	45 + 30	„	48 − 20	63 − 30	76 − 50	„
6)	20 + 26	30 + 29	40 + 31	„	43 − 23	55 − 35	87 − 47	„
7)	32 + 24	42 + 35	51 + 27	„	56 − 22	68 − 25	79 − 36	„

Разберем каждую из этих групп упражнений в отдельности.

1) 20 + 5; 28 − 8. Чтобы складывать и вычитать такие числа, достаточно знать нумерацию, уметь составить двузначное число из десятков и единиц и разложить его на десятки и единицы.

2) 4 + 20; 26 − 20. Из этой группы примеров берется только сложение, которое прорабатывается на основе предыдущих упражнений. Дети уже неоднократно пользовались приемом перестановки слагаемых. И в данном случае достаточно показать, что 4 + 20 это то же самое, что 20 + 4. Что касается вычитания (26 − 20), то хотя оно и может быть выведено из знания десятичного состава двузначных чисел, все же лучше присоединить эти случаи к пятой группе упражнений, когда дети будут отнимать круглые десятки от любого двузначного числа.

3) 23 + 2; 27 − 3. Складывая числа 23 и 2, дети должны понимать, что они прибавляют *два* к *трем* и затем 20 соединяют с *пятью*. Отнимая 3 от 27, они должны научиться отнимать 3 от 7, не трогая десятков. Пояснить эти приемы сложения и вычитания удобно на спичках: пучки-десятки нет надобности развязывать; действия производятся только над единицами.

Эти приемы удобно прорабатывать на таких примерах:

а)	4 + 2	23 + 3	32 + 3	б)	7 − 3	38 – 2	49 − 2
	24 + 2	26 + 3	52 + 5		27 − 3	35 − 2	39 − 3
	34 + 2	24 + 3	42 + 4		47 − 3	39 − 2	59 − 6
	64 + 2	25 + 3	72 + 7		57 − 3	36 − 2	79 − 5

4) 5 + 24; 37 − 32. Из этой группы примеров так же, как и из второй группы, берем только сложение. Чтобы прибавить 5 к 24, достаточно переставить эти числа одно на место другого. Пояснить это можно на спичках. Налево лежит 5 спичек, направо сначала 2 пучка-десятка, а затем 4 спички. Кладем наоборот: 2 пучка и 4 спички налево, а 5 спичек направо; тогда становится ясно, как выполнить сложение. Что касается вычитания, то этот случай надо отнести к последней группе упражнений, т. е. к вычитанию двузначного из

двузначного, когда число единиц уменьшаемого больше числа единиц вычитаемого.

5) 25 + 20; 48 − 20. При сложении 25 и 20 дети должны понять, что сначала надо соединить вместе десятки, а затем к полученному числу прибавить единицы. Отнимая 20 от 48, надо 20 отнять от 40, не трогая единиц. Пояснить эти приемы сложения и вычитания можно на спичках: действия производятся над пучками-десятками, число единиц остается без изменения.

6) 20 + 26; 43 − 23. Сложение таких чисел, как 20 и 26, не требует особых пояснений; оно производится совершенно так же, как рассмотренное уже сложение двузначного числа и круглых десятков. При вычитании составляем число 43 из 4 пучков-десятков и 3 спичек. Сбрасываем сначала 2 пучка — 20, а затем 3 спички или наоборот.

7) 32 + 24; 56 − 22. Складывая 32 и 24, можно сначала соединить вместе десятки, затем соединить вместе единицы и полученные числа сложить. Но можно также, воспользовавшись уже изученным приемом сложения двузначного числа с круглыми десятками, сложить сразу 32 и 20, а затем к полученному числу прибавить 4. При вычитании можно от 50 отнять 20, от 6 отнять 2 и остатки сложить. Но лучше сразу от 56 отнять 20 и от полученного числа отнять 2. Все эти приемы следует пояснить на спичках. Складывая 32 и 24, дети изображают каждое число при помощи пучков-десятков и отдельных спичек. Объясняя прием сложения, они фактически выполняют то, что говорят. При вычитании надо составить из спичек только уменьшаемое.

Проработка описанных приемов связывается с решением групп „аналогичных“ примеров:

а)	5 + 3	32 + 45	35 + 53	б) 7 − 4	68 − 25	89 − 25
	35 + 3	42 + 35	36 + 52	47 − 4	68 − 23	87 − 25
	35 + 23	72 + 25	32 + 55	47 − 24	68 − 26	88 − 25

Измерение и черчение.

Дециметр и сантиметр. При изучении нумерации до 100 учащиеся пользовались метровой лентой, разделенной на дециметры и сантиметры. В это время они еще не знали названий этих мер: на ленте они различали просто десятки и единицы. Эта лента служит своего рода подготовкой к усвоению метрических мер.

Дециметр и сантиметр не следует вводить сразу на одном уроке, согласно общему педагогическому правилу о сообщении новых понятий по одному. Начинать следует с дециметра, как более крупной меры после метра, который детям уже известен. Такой порядок — от более крупных мер к более мелким — вытекает из педологического требования пользоваться в работе

с маленькими детьми относительно более крупным дидактическим материалом. Впрочем, вскоре за дециметром можно ввести и сантиметр: в конце первого года обучения дети уже достаточно развиты, чтобы усвоить и эту мелкую меру.

С *дециметром* дети знакомятся следующим образом. Учитель раздает детям бумажные полоски несколько длиннее одного дециметра. Дети находят в учебнике изображение одного дециметра, прикладывают к нему свои полоски и аккуратно отрывают или отрезают излишек. После этого они измеряют дециметром длину и ширину стола, ширину и высоту доски и других предметов в классе. Полученные числа они записывают в тетради, сокращенно обозначая дециметр буквами *дм*.

Следующий этап работы — измерение дециметром бумажной полосы длиною в 1 метр. Измеряя метр дециметром, дети наносят на него соответствующие деления и непосредственно убеждаются, что в *1 метре 10 дециметров*. Метром, разделенным на дециметры, они измеряют различные расстояния в классе. Так как в это время было бы еще рано вводить составные именованные числа, учащиеся считают не метрами, а десятками дециметров, присоединяя к ним полученные при измерении сверх полных десятков отдельные дециметры. Измерить таким образом они могут длину и ширину класса, длину электрического провода, веревки, доски и т. д. Полученные двузначные числа с наименованием *дм* дети записывают в тетради. Полезно упражняться в определении расстояний наглаз, но для этой цели надо брать небольшие расстояния, не больше 10—12 *дм*. Высказанные детьми предположения должны быть проверены соответствующими измерениями.

Когда дети хорошо освоятся с измерением дециметром, можно познакомить их с *сантиметром*. Учитель снова раздает детям бумажные полоски несколько длиннее дециметра. Пользуясь чертежом в учебнике, дети делают из этих полосок дециметр. Приложив его к дециметру на чертеже, они намечают на своих полосках сантиметры и убеждаются, что в *дециметре 10 сантиметров.*

Затем, пользуясь дециметром, разделенным на сантиметры, они измеряют небольшие предметы в классе и дома. Чтобы при измерении не получились составные именованные числа, они считают сантиметры десятками; к полным десяткам они присоединяют отдельные сантиметры, если таковые окажутся. Таким образом они измеряют длину и ширину тетради, книги, и длину карандаша; высоту своего стула и стула учителя и т. д. Полученные результаты записывают в виде двузначного числа с наименованием *см*. Попутно они упражняются в измерении небольших отрезков наглаз с последующей проверкой.

Имея перед собою метр, разделенный на дециметры и сантиметры, дети

считают сантиметры десятками и устанавливают, что *в метре 100 сантиметров.* Для этой цели можно воспользоваться упомянутыми выше полосками, которые служили наглядным пособием при изучении нумерации. Затем дети производят измерения метром, разделенным на дециметры и сантиметры, выражая полученный результат соответствующим числом сантиметров. Отрезки для измерения должны быть не больше метра, т. к. числа больше ста детям еще недоступны, а составные именованные числа на первом году обучения тоже еще не вводятся.

Главу „Измерение дециметром и сантиметром“ в учебнике можно использовать только в качестве материала для повторения.

Измерение времени. На первом году обучения дети знакомятся с часом, сутками, неделей и месяцем. Раньше всего вводится неделя — шестидневка и семидневка. Это достаточно крупные и вместе с тем обозримые для детей промежутки времени. Эти сведения дети получают еще в период изучения первого десятка. Удобнее всего связать проработку этого материала с ведением календаря погоды или с регистрацией посещаемости. В городской школе дети будут иметь дело преимущественно с шестидневкой, в деревенских условиях — с семидневкой. Но городские дети должны знать, что существует и семидневная неделя, а учащиеся сельской школы получают сведения о шестидневке.

Позднее, при проработке первой сотни дети знакомятся с часами. На доске перед классом вывешивается модель часов. Желательно, чтобы небольшие модели были и на руках у учащихся. О минутной стрелке дети должны только знать, что в течение часа она делает полный оборот. Подробнее они знакомятся с движением часовой стрелки. Все расчеты в пределах суток дети делают непосредственно на модели часов. Передвигая часовую стрелку, они считают, сколько времени пройдет от 8 часов утра до 4 часов дня, от 5 часов дня до 10 часов вечера и т. д. При этом выясняется, что сутки начинаются в полночь, что от полуночи до полудня проходит 12 часов — это половина суток. До следующей полуночи, т. е. до конца суток проходит еще 12 часов. Таким образом в сутках 24 часа.

Соотношение между месяцем и сутками, месяцем и неделей дается лишь в грубом приближении: в месяце 30 суток, 5 шестидневок и 4 семидневки.

Куб, брусок, шар. Знакомство учащихся с элементами геометрии на первом году обучения, в частности с образами простейших геометрических тел, должно осуществляться исподволь. Таким образом глава в учебнике — „Куб, брусок, шар“ является завершением, итогом предшествующей работы.

Образы геометрических тел вводятся почти с первых шагов обучения и вводятся, как все новые понятия, по *одному.*

Уже при изучении первого десятка дети встречаются с шариками и кубиками как с удобным счетным материалом. Из шариков они нанизывают цепочки, из кубиков складывают бруски. Таким образом, к тому времени, когда по программе настанет очередь заняться этим вопросом, дети уже будут иметь некоторое представление об упомянутых геометрических телах.

Останется уточнить детские представления, насколько это позволяет их возраст. Лучшим средством в данном случае является лепка. Дети лепят из глины кубики и бруски. Исправляя работу детей, учитель вносит точность в соответствующие представления. Сначала дети лепят определенные известные им предметы: кубической формы чернильницу, пресс-папье, ящик или имеющую форму бруска спичечную коробку, резинку, пенал и т. п. Затем, научившись относить слово *куб* и *брусок* к определенным предметам, дети могут лепить из глины, так сказать, отвлеченные кубики и бруски. Кубики могут отличаться один от другого величиной, а бруски — не только величиной, но и длиной, шириной или толщиной и высотой. Никаких подробностей о гранях, ребрах и вершинах этих тел детям на первом году сообщать не надо. Тем более было бы преждевременно делать развертки этих тел и клеить из разверток самые тела. Для начала можно лепить куб и брусок при помощи формочек, например, использовать для этой цели спичечную коробку, но закончить проработку надо именно свободной лепкой, иначе основная цель этой работы — освоение формы — не будет достигнута.

Все, что сказано о кубе и бруске, относится и к шару. Куб и брусок можно вводить почти одновременно, один вслед за другим, так как параллельная проработка поможет детям лучше понять особенности каждой из этих форм. Шар можно дать им несколько позднее или, быть может, раньше. Лепить шарик легче, чем приготовлять куб и брусок. С этой точки зрения можно начать работу именно с шара.

Знакомство с геометрическими телами можно закончить составлением коллекции предметов, имеющих форму куба, бруска и шара.

Измерение расстояний на местности. К концу учебного года с наступлением теплой погоды дети выходят на школьный двор, на огород, в сад и производят там измерение расстояний при помощи мерной веревки. Концы веревки должны быть завязаны в виде колечек, чтобы удобно было веревку натянуть при помощи колышков, которые втыкаются в землю. Если веревку натянуть, то от середины одного колечка до середины другого должно поместиться 10 метров. У конца каждого метра к веревке привязывают небольшую бляшку из жести или прямоугольник из картона, на которых отмечается соответствующее число метров.

На каждых троих учащихся должна быть одна мерная веревка, 10 колышков и дощечка с прикрепленной к ней четвертушкой бумаги, на которой один

из троих учеников будет записывать результаты измерений. В классе заранее намечается, какие именно расстояния должна измерить каждая тройка. Названия измеряемых расстояний заносятся на бумагу, например:

Длина школы ....
Ширина школы ....
Длина огорода.................
Ширина огорода..............
Длина грядки ....и т. д.

Один из учащихся несет в мешке колышки, другой — мерную веревку, третий — дощечку с бумагой и карандаш. У начала измеряемого отрезка первый ученик втыкает колышек, продев его через колечко мерной веревки. Тот же ученик натягивает мерную веревку, двигаясь с нею по направлению измеряемого отрезка. Когда веревка натянута, первый ученик снова втыкает колышек, отмечая тем самым отмеренное расстояние. Тогда второй ученик, оставшийся позади, снимает с колышка мерную веревку и, сматывая ее по мере продвижения вперед, идет к тому месту, где вбит второй колышек. Третий ученик отмечает против названия измеряемого расстояния: 10 *м*. По образцу первых десяти метров дети отмеривают второй раз, третий раз и т. д. по 10 метров. Идущий впереди ученик постепенно освобождается от своих колышков, которые остаются в земле, чтобы учитель мог проверить работу детей. На дощечке у третьего ученика получается такая, примерно, запись:

Длина школы 10 *м* + 10 *м* +10 *м* + 7 *м* = 37 *м*.

Измерив одно из заданных расстояний, дети приступают к измерению следующего. Если запас колышков истощился, ученики должны попросить учителя проверить выполненную работу и после этого вынуть свои колышки.

В классе из собранного детьми на экскурсии материала они сами, под руководством учителя, составляют и решают задачи. Например:

По длине двора мерная веревка уложилась 6 раз и еще пришлось отмерить 5 метров. Какова длина школьного двора?

Или:

Длина огорода 86 метров. Сколько раз ляжет по длине его мерная веревка и сколько метров еще останется?

Подобно тому, как раньше это делали в классе, теперь дети определяют наглаз длину грядки на огороде, расстояние от школы до сарая, от сарая до колодца и т. д. и проверяют свои предположения при помощи измерений.

Больше или меньше на столько-то.

На столько-то больше. Выражение *на столько-то больше* можно разъяснить при помощи следующих методических приемов:

1. Учитель предлагает детям положить 4 кружка налево и *столько же* кружков направо.

Вопросы:	*Ответы:*
а) Сколько кружков налево?	Налево 4 кружка.
б) Сколько кружков направо?	Направо *тоже* 4 кружка.

Получив эти ответы от детей, учитель заменяет выражение: „налево 4 кружка и направо тоже 4 кружка“ другими выражениями, которые учащиеся повторяют вслед за ним: *направо столько же кружков, сколько и налево; налево и направо кружков поровну.*

2. Учитель предлагает детям положить налево 4 кружка, а направо *столько же и еще 2 кружка.* Затем он ставит вопрос: сколько кружков направо?

Выражение *столько же*, равносильное слову *поровну*, было только что разъяснено учащимся. Такие обороты речи, как и *еще 2 кружка*, встречались много раз в задачах на сложение. Поэтому детям не трудно будет дать ответ на поставленный учителем вопрос и не трудно объяснить, как они нашли этот ответ: к четырем прибавили два, получилось шесть. После этого учитель заменяет выражение *столько же и еще 2 кружка* выражением *на 2 кружка больше*. Учащиеся повторяют вслед за учителем: *Направо на 2 кружка больше, чем налево.*

3. В окончательном виде задача строится следующим образом:

Положите налево 5 кружков. Положите направо на 3 кружка больше. Сколько кружков направо?

Чтобы выполнить это задание учащиеся должны на основании предыдущего рассуждать следующим образом: на 3 кружка больше — это значит *столько же и еще 3 кружка*. Поэтому надо положить налево и направо *поровну* по 5 кружков, а затем положить направо еще 3 кружка. Тогда направо будет всего 8 кружков.

Как вы узнали, что кружков будет восемь? спрашивает учитель. К *пяти прибавили три, получилось восемь* — отвечают учащиеся. Установив таким образом действие, которым решается этот вопрос, учащиеся записывают его.

Чтобы закрепить достигнутый результат, необходимо проделать ряд упражнений, аналогичных данному, а затем перейти к решению задач, в которых встречается выражение *на столько-то больше*. Если бы при решении таких задач встретились затруднения, следует прежде всего восстановить те ассоциации, которые должны были образоваться у учащегося и могут

направлять ход его мыслей. Предположим, дети решают задачу: тетрадь стоит 30 копеек, книжка на 20 копеек дороже. Сколько стоит книжка?

Что значит — на 20 копеек дороже? спрашивает учитель. Это значит — столько же и еще 20 копеек, т. е. 30 копеек и еще 20 копеек, должен пояснить ученик. Можно сказать иначе: лишних 20 копеек или сверх того 20 копеек и т. п. Если же этих словесных объяснений окажется недостаточно, следует обратиться к первоисточнику, а именно к дидактическому материалу, т. е. спичкам, кружкам и т. п.

Наряду с выражением *на столько-то больше* надо проработать выражения: на столько-то длиннее, шире, выше, дороже и т. д. Знакомство с выражением „длиннее на столько-то" необходимо соединить с черчением и отмериванием прямых линий. Например: начертите прямую линию в 7 сантиметров. Начертите другую линию, на 4 сантиметра длиннее. Какова ее длина? Или: отмерьте на полу прямую линию длиною в 3 метра. Отмерьте рядом другую линию, на 2 метра длиннее. Какова длина второй линии и т. д.

На столько-то меньше. Выражение *на столько-то меньше* можно разъяснить при помощи следующих методических приемов:

1. Учитель предлагает детям положить налево и направо поровну — по 6 спичек, а затем взять из правой кучки 2 спички.

Сколько спичек осталось в правой кучке? спрашивает учитель. Как вы узнали, что осталось 4 спички? Учащиеся должны ответить: от шести мы отняли два, получилось четыре. Направо теперь *недостает двух спичек*, поясняет учитель. Можно сказать иначе: *направо на 2 спички меньше, чем налево.* Учащиеся должны повторить эту фразу вслед за учителем.

2. В окончательном виде задача строится следующим образом: Положите налево 7 спичек. Положите направо на 3 спички меньше. Сколько спичек направо?

Чтобы выполнить это задание и ответить на вопрос, учащиеся должны на основании предыдущего рассуждать следующим образом: на 3 спички меньше — это значит *недостает трех спичек*. Поэтому сначала надо положить налево и направо поровну — по 7 спичек, а потом взять из правой кучки 3 спички. Тогда направо останется 4 спички. — Как вы узнали, что направо останется 4 спички? спрашивает учитель. *От семи отняли три получилось четыре*, отвечают учащиеся. Остается записать решение: $7 - 3 = 4$ и проделать ряд аналогичных упражнений для закрепления нового понятия.

Затем дети переходят к решению задач, в которых встречается выражение *на столько-то меньше*. В случае каких-либо затруднений следует прежде всего напомнить учащимся те более конкретные обороты речи (нехватает, недостает), которыми можно заменить условное выражение *меньше*

на столько то, а затем, если бы этого оказалось недостаточно, обратиться к помощи дидактического материала — к работе с кружками, спичками и т. д.

Наряду с выражением *на столько-то меньше* полезно вводить в задачи выражения: на столько-то короче, уже, ниже, дешевле и т. д. Выражение *короче на столько-то* следует проработать лабораторно, в связи с отмериванием и черчением отрезков прямой.

ЗАДАЧИ НА ПЕРВОМ ГОДУ ОБУЧЕНИЯ.

Общие замечания.

Определения. Под задачей в широком смысле можно понимать требование найти одно или несколько неизвестных чисел по числам данным. Это определение, как мы видим, подходит в равной мере и к задаче с текстом и к числовому примеру. Следуя, однако, обычному в начальной школе употреблению слова *задача*, мы будем применять его только к задаче с текстом.

В числовом примере действия и их порядок прямо указываются при помощи соответствующих знаков. В задаче, наоборот, ученик должен сам найти зависимость между числами, сам выбрать действия и установить их последовательность.

Задачи бывают *простые* — в одно действие и *сложные* — в два, три и более действий. Сложными называются и такие задачи, которые решаются повторением одного и того же действия.

На первом году обучения дети решают задачи в одно-два действия. Таким образом, уже в первом классе, после достаточных упражнений в решении простых задач, дети начинают решать и, так называемые, сложные задачи.

Значение простых задач. Каждое арифметическое действие в начальной школе изучается с двух сторон: со стороны его смысла и со стороны его вычислительных приемов. Вычислительные приемы выясняются на специально подобранных числовых примерах, смысл же действия раскрывается при решении задач. Целесообразнее всего пользоваться в этом случае простыми задачами: наличие в задаче нескольких действий отвлекло бы внимание учащегося от основной цели, отодвинуло бы ее на второй план.

Разъяснив предварительно смысл данного действия на дидактическом материале, учитель устанавливает при помощи простых задач связь между изучаемым арифметическим действием и всевозможными конкретными случаями его применения. Чем разнообразнее и богаче по своему материальному содержанию решенные детьми простые задачи, тем успешнее раскрывается на этой основе конкретный смысл арифметических действий.

На большом числе простых задач дети усваивают типичные, основные вопросы, решаемые каждым действием. Так, вопрос сложения можно понимать просто как вопрос соединения данных чисел в одно число, но можно также понимать это действие, как увеличение данного числа на несколько единиц. Вычитание можно рассматривать и как нахождение остатка, и как уменьшение на несколько единиц, и как нахождение разности и т. д.

Простые задачи, которые дети решают на первом году обучения, кроме первоначального, основного смысла арифметических действий, должны раскрыть смысл сложения и вычитания, как увеличения и уменьшения числа на несколько единиц.

Значение сложных задач. Решая сложную задачу, учащиеся должны разбить ее на простые задачи и расположить их в определенной последовательности. Такого рода работа развивает логическое мышление учащегося, что уже само по себе является весьма полезным.

С другой стороны, чтобы решить сложную задачу, учащиеся должны весьма ярко представить себе событие, составляющее ее содержание, вникнуть в него, понять его. В противном случае решение задачи будет для него непосильным. Поэтому если задачи достаточно полно отражают быт, технику, строительство, природу, то они служат весьма действительным средством для изучения этих явлений. Через задачу ученик знакомится с разнообразными сторонами жизни и природы, при этом в точной количественной форме.

На первом году обучения дети решают сложные задачи только в два вопроса. Но уже и эти задачи, при всей их незамысловатости, содействуют развитию формально-логического мышления учащихся и обогащают их, при надлежащем выборе тем, различными полезными знаниями жизненного характера.

Постепенное нарастание трудности задач на первом году обучения. Решение задач начинают с простых задач на сложение и вычитание. Уже на первых уроках арифметики учитель ведет подготовительные упражнения к решению таких задач. При изучении первого десятка дети решают простые задачи на сложение и вычитание, раскрывающие первоначальный, основной смысл этих действий.

В пределах второго десятка, во время проработки внетабличного сложения и вычитания можно ввести более трудные задачи в одно действие, в которых сложение задано в терминах вычитания и вычитание в терминах сложения.

При проработке таблицы сложения и вычитания в пределах 20, после подготовительных упражнений, дети приступают к решению задач на сложение и вычитание в два действия.

Изучение умножения и деления в пределах 20 сопровождается решением простых задач, раскрывающих смысл выражений *взять по столько, разделить по столько-то* и *разделить на столько-то равных частей*. Вслед

за простыми — дети решают и сложные задачи в два действия на сложение, вычитание, умножение и деление.

При изучении первой сотни в задачах впервые появляются выражения *на столько-то больше* и *на столько-то меньше.*

Решение простых задач на сложение и вычитание.

Подготовительные упражнения. Чтобы подготовить детей к решению простых задач на сложение и вычитание, необходимо создать ассоциации между терминами *прибавить* и *отнять* и теми разнообразными выражениями, которые характеризуют действия сложения и вычитания в задачах. *Прибавить* — это придвинуть, принести, подойти, подбежать, подплыть, подлететь, купить и т. д. Это действие характеризуют также словечки: и, да, еще, всего, вместе и т. д. *Отнять* — это отодвинуть, унести, отойти, убежать, уплыть, улететь, разбить, потерять и т. д. Это действие подсказывают такие словечки, как без, от, из, осталось и т. д. Для создания и укрепления этих ассоциаций можно воспользоваться подвижным дидактическим материалом, окружающими предметами, картинами и даже самими учащимися (драматизация). Полезно иметь изображения вещей из картона, глины, фанеры, бумаги (яблоки, груши, морковки, грибы, птицы, рыбы, домики, лодочки, флажки и т. д.), которые дети могут раскладывать или расставлять у себя на столе, а учитель прикрепляет к доске, вешает на стене или выставляет на планке доски.

Вырезанные из картона фигуры уток дети вставляют в щели небольших деревянных брусков. Такие фигурки на подставках удобно ставить на стол и передвигать по желанию. Учитель формулирует задачу-рассказик: одна утка на берегу. Две утки подплыли и вышли на берег. Сколько всего уток? Дети передвигают фигурки из картона, иллюстрируя задачу. К одному прибавить два — сколько получится? задает учитель наводящий вопрос. К одному прибавить два, получится три, отвечают дети полным ответом.

Кролику дали три морковки, рассказывает учитель. На столе перед каждым учащимся лежит по 3 морковки из картона. Кролик съел 2 морковки, продолжает учитель. Сколько морковок осталось? Дети убирают со стола 2 морковки и отвечают: осталась одна морковка. Учитель задает наводящий вопрос: от трех отнять два — сколько получится? и получает полный ответ: от трех отнять два, получится один.

Флажки можно развешивать и снимать, грибы можно находить и терять, яблоки можно срывать и съедать, домики можно расставлять и убирать и т. д. Каждый раз, задавая учащимся наводящий вопрос, в котором встречается

выражение прибавить или отнять, учитель, так сказать, переводит словечки нашел, потерял, повесил, снял и т. д. на условный арифметический язык, укрепляя нужные для решения задач ассоциации.

Той же цели могут служить картинки в задачнике.

Готовая запись действия под каждой картинкой, наряду с наводящими вопросами учителя, еще более содействует укреплению ассоциаций между определенными процессами и их устным и письменным выражением на условном арифметическом языке.

Такого рода подготовительные упражнения к решению задач ведутся во все время проработки первого пятка. В этот начальный период обучения арифметике было бы преждевременно заниматься решением задач в настоящем смысле этого слова.

Решение задачи. В предшествующих упражнениях нет решения задач в полном смысле этого слова, так как нет еще *выбора действия* самими учащимися. Действие подсказывается либо наводящим вопросом учителя, либо записью под рисунком, либо тем и другим вместе. Самые слова *задача, решение задачи* еще могут отсутствовать в это время в языке ребенка так же, как и вся условная фразеология, связанная с решением задач: что говорится в задаче, что спрашивается в задаче, как вы узнали, что вы узнали и т. д. Чтобы ввести эти выражения, научить ребенка понимать их и ими пользоваться, можно поступить следующим образом.

Учитель создает на глазах у учащихся сюжет для задачи, например, на стену, где перед тем уже висело 3 картины, вешает еще 2 картины. По наводящим вопросам дети сами составляют условие задачи: на стене висело 3 картины; повесили еще 2 картины.

Затем учитель говорит: „*Решим задачу* (пауза). На стене висело *три* картины. Повесили *еще две* картины (пауза). Сколько *всего* картин висит на стене?

Дети впервые слышат слова *решим задачу*. Необходимо прежде всего уточнить слово *задача*. С этой целью после новой небольшой паузы учитель предлагает *повторить задачу* сначала по наводящим вопросам, затем без наводящих вопросов. Дальше следует выделение вопроса задачи: что же спрашивается в задаче? Ответ: в задаче спрашивается, сколько всего картин висит на стене.

Учащиеся уже не раз отвечали на вопрос: сколько всего. Теперь им остается понять, что, отвечая на вопрос, сколько всего картин висит на стене, они *решают задачу*. Слова учителя: решайте задачу, кто решил задачу и т. п. содействуют образованию этой новой ассоциации. Ответ сообщается в краткой форме: 5 картин. Учитель опрашивает одного за другим нескольких учеников и убедившись, что большинство детей правильно решило задачу, переходит к следующему этапу работы — выявлению действия, которым решается задача.

Фактическое прибавление к трем картинам двух картин, происходившее на глазах у детей, а также подчеркнутые при сообщении задачи словечки *еще* и *всего*, подскажут им правильный ответ: к трем прибавить два, получится пять. После этого останется записать решение при помощи разрезных цифр и ответить на последний вопрос: что же мы узнали? Мы узнали, что на стене висит 5 картин.

Итак, при решении простой задачи можно придерживаться следующей схемы:

1. Сообщение задачи.
2. Повторение задачи по наводящим вопросам.
3. Повторение задачи без наводящих вопросов.
4. Выделение вопроса задачи.
5. Решение задачи в уме и устный ответ.
6. Выявление действия, которым решена задача.
7. Запись решения.
8. Формулировка ответа.

Пока дети не научились писать, приходится пользоваться разрезными цифрами и знаками действий. По мере возможности вводится запись решения. Записать в это время условие и вопрос задачи дети, разумеется, еще не могут. Достаточно, если они запишут цифрами самое действие, а конкретное содержание задачи найдет себе отражение в наименовании, которое ставится рядом с числами. Наименование надо записывать сокращенно, по существующим орфографическим правилам. Названия метрических мер также записывают сокращенно, по существующему стандарту. Формулировка ответа делается устно.

Главная трудность в решении задач и способы ее преодоления. Выбор действия для задачи — отвлеченный, логический акт, представляющий основную трудность в решении простых задач. На первых порах, при решении задач с небольшими числами, выбор действия затрудняет ученика главным образом потому, что сам он не видит в этом надобности. Дело в том, что, решая задачу, он не вычисляет, а просто пользуется знанием состава числа. Так, отвечая на вопрос, сколько стоит тетрадь, если резинка стоит 3 коп., а за резинку и тетрадь вместе заплатили 8 коп., ученик говорит: 5 коп., так как *три да пять будет восемь*. Выбирать действие приходится уже после того, как задача фактически решена. Другое дело, когда в задаче даются большие числа. В этом случае необходимо наперед знать действие, которым решается данный вопрос, чтобы вычислить требуемый ответ. Однако было бы ошибкой, отложить усвоение этих по существу формальных навыков на второй или третий год обучения. Основная цель работы над задачей в первой группе как раз и заключается в том, чтобы привить детям формальные

навыки, связанные с решением задач. Без своевременного усвоения этих навыков нельзя будет подвести детей к решению задач в два действия в том же первом году обучения и к решению более сложных задач в дальнейшем.

Как преодолеть трудности, связанные с выбором действия? Прежде всего надо дать детям возможность решить задачу в уме каким угодно способом и назвать ответ.

На стол поставили 6 глубоких тарелок и *еще* 2 мелких тарелки. Сколько *всего* тарелок поставили на стол?

Дети решают задачу и говорят ответ: 8 тарелок. Как вы это узнали? спрашивает учитель. Если учащиеся затрудняются дать правильный ответ несмотря на подчеркнутые учителем слова *еще* и *всего*, которые должны оживить имеющиеся у детей ассоциации, то остается одно — вернуть их к первоисточнику этих ассоциаций — работе с дидактическим материалом. Тарелки учитель предлагает заменить кружками и при помощи кружков пояснить содержание задачи. Особенно часто придется пользоваться этим приемом при решении задачи на вычитание, когда выбор действия труднее.

Тетрадь и резинка стоят вместе 8 копеек. За резинку заплатили 3 копейки. Сколько стоит тетрадь?

Чтобы изобразить 8 копеек, дети кладут на стол 8 кружков. Сколько копеек надо отдать в уплату за резинку? спрашивает учитель. Дети снимают три кружка. Остается 5 кружков. Сколько стоит тетрадь? Как вы это узнали? продолжает задавать вопросы учитель. Теперь уже не трудно будет ответить: от 8 отнять 3.

Пояснить решение задач можно также при помощи рисунка, который учитель делает на доске, а учащиеся воспроизводят в тетради. Детям, у которых бедно воображение, ярче представится событие, о котором говорится в задаче, а вместе с тем, станет яснее и выбор действия. Иллюстрируя задачу, мы не ставим себе целью пояснить числовой результат действия: вычислительные приемы и результаты действий должны быть предварительно усвоены на дидактическом материале. *Не следует также соединять изображенные на рисунке предметы знаками действий,* т. е., смешивать конкретное с условно-символическим.

Трудные задачи в одно действие. При изучении второго десятка дети продолжают упражняться в решении простых задач, т. е. задач в одно действие. Но уже во время проработки сложения и вычитания без перехода через десяток можно ввести более трудные задачи в одно действие. Сюда относятся задачи, в которых сложение задается в терминах вычитания, а вычитание — в терминах сложения. Вот эти виды:

1. По сумме и первому слагаемому найти второе слагаемое. Например:

В ведро налили 4 литра воды. Сколько *еще* воды надо добавить, чтобы получилось полное ведро? (В ведре 12 литров). Или: „В классе было 16 ударников, к концу четверти их стало 20. Сколько *прибавилось* в классе ударников?

2. По сумме и второму слагаемому найти первое слагаемое. Например:

В бидон влили кувшин молока и *еще* 4 стакана. *Всего* влили 15 стаканов. Сколько стаканов молока было в кувшине?

Или: В санатории мальчик *прибавился* в весе на 2 килограмма. Теперь он весит 20 килограммов. Сколько весил мальчик до поступления в санаторий?

Или: На одну чашку весов положили гирю в 5 килограммов, на другую мешок с сахаром и *еще* гирю в один килограмм. Сколько весит сахар?

3. По уменьшаемому и остатку найти вычитаемое. Например:

В мешке было 20 килограммов муки. Осталось 8 килограммов. Сколько муки *израсходовали*?[1]

4. По вычитаемому и остатку найти уменьшаемое. Например:

Ребята прочитали 8 страниц новой книги. *Осталось* еще 12 страниц. Сколько всего страниц в книге?

Давать такие задачи следует осторожно, по одной, среди обычных задач в одно действие на сложение и вычитание. Некоторые из них полезно пояснять схематическими рисунками (ведро с водой, веревка с грузом, чашки весов и т. п.).

Задачи в два действия на сложение и вычитание.

Подготовительные упражнения. Решая задачу в два действия, ученик разлагает ее на простые задачи, выбирает действие к каждой из этих простых задач и производит вычисления. Для того, чтобы расчленить таким образом сложную задачу, ученик должен прежде всего осознать, что *сразу* (т. е. одним действием) он не может ответить на ее вопрос. Пусть, например, надо решить задачу:

На одной стене висело 11 картин, на другой 7 картин. Сняли 15 картин. Сколько картин осталось висеть?

Выделив вопрос задачи, ученик замечает, что сразу он не может на него ответить.

Проследим ход мысли ученика. В задаче говорится, что сняли 15 картин, но неизвестно, сколько всего картин висело на стене. Поэтому и нельзя сразу ответить на вопрос задачи. Очевидно, если такого рода мысли пробегают в голове ученика, он должен понимать, на основании каких данных можно было бы ответить на этот вопрос. Другими словами, он обнаруживает способность *подобрать данные к вопросу.*

---

[1] В этом случае трудность заключается в том, что слова *осталось* и *израсходовали* как бы поменялись местами.

Убедившись, что ему не хватает данных, ученик подходит к задаче, так сказать, с другого конца. — А что можно узнать сразу? — спрашивает он. Оказывается, что, сложив 11 картин и 7 картин, можно узнать, сколько всего картин висело на стене. В этом случае, как мы видим, ученик к *данным подбирает вопрос.*

Решив его, он снова возвращается к вопросу задачи и устанавливает, что теперь уже можно на него ответить: данных достаточно.

Таков, примерно, ход мыслей ученика при решении задачи в два действия. В соответствии с этим подготовительными упражнениями к решению таких задач могут быть: 1) задача без вопроса, к которой надо подобрать вопрос, и 2) вопрос без задачи, к которому надо составить задачу.

Вот образцы задач без вопроса:

На одной полке 11 книг, на другой 9 книг. Что можно узнать? Или: В коробке было 12 карандашей. Вынули 10 карандашей. Что можно узнать?

Вот образцы вопросов без задач:

В задаче спрашивается, сколько стоят тетрадь и карандаш вместе: Что надо знать, чтобы ответить на этот вопрос? Или: В задаче спрашивается, сколько метров ситцу осталось. Что надо знать, чтобы ответить на этот вопрос?

Решение задач в два действия. При решении первых задач в два действия необходимость расчленения сложной задачи на две простых можно сделать ясной для учащихся путем следующих упражнений.

Учитель подбирает две простых задачи, из которых можно было бы составить сложную и решает их с детьми последовательно одну за другой. А затем из них же составляет сложную задачу, меняя иногда данные числа. Учащийся поймет, как задача расчленяется на простые задачи, если он будет видеть, как она составляется из простых задач. Приведем пример.

1) В одном бидоне было 12 литров молока, в другом 8 литров. Сколько молока в обоих бидонах?

2) 16 литров этого молока употребили на приготовление масла. Сколько молока осталось?

Составим из этих двух задач одну. Сколько литров молока было в одном бидоне? Сколько литров в другом? Сколько молока пошло на масло? Что требуется узнать?

По наводящим вопросам учителя дети составляют задачу:

В одном бидоне было 12 литров молока, в другом 8 литров. Из 16 литров молока приготовили масло. Сколько молока осталось?

Задачу решают. Затем учитель предлагает такую же задачу с другими числами, которую дети решают уже без подготовительных задач. Например:

В одном пучке было 11 морковок, в другом 9 морковок. Кролики съели 13 морковок. Сколько морковок осталось?

Процесс решения этой задачи можно разбить на следующие этапы:

1. Сообщение задачи,
2. Повторение задачи по наводящим вопросам:

а) Сколько морковок было в первом пучке?	В первом пучке было 11 морковок.
б) Сколько морковок было во втором пучке?	Во втором пучке было 9 морковок.
в) Сколько морковок съели кролики?	Кролики съели 13 морковок.
г) Что надо узнать?	Сколько морковок осталось?

3. Повторение задачи без наводящих вопросов.
4. Выделение вопроса задачи:

Что спрашивается в задаче?	В задаче спрашивается, сколько морковок осталось.

5. Составление плана решения задачи.

а) Можно ли сразу узнать, сколько морковок осталось?	Нет, так как мы не знаем, сколько морковок было в двух пучках.
б) А что можно узнать сразу?	Сколько было всего морковок.
в) Что можно будет узнать после этого?	Сколько морковок осталось.

6. Повторение плана решения задачи.

а) Повторите первый вопрос.	Сколько было всего морковок?
б) Повторите второй вопрос.	Сколько морковок осталось?

7. Решение задачи и запись решения.

1) 11 м. + 9 м. = 20 м.
2) 20 м. − 13 м. = 7 м.

8. Формулировка ответа.

Что мы узнали в задаче?	Мы узнали, что осталось 7 морковок.

Подобно тому, как при решении простых задач основная трудность заключалась в выборе действия, так при решении сложных задач основною трудностью является составление плана. В первом случае трудность увеличивалась вследствие того, что учащийся не испытывал потребности в выборе действия. Подобно этому во втором случае учащийся не видит необходимости в составлении плана. Чаще всего ему приходится составлять план уже после того, как задача фактически решена. Причина — небольшие числа,

над которыми приходится производить вычисления, знание состава этих чисел и трудность для учащихся первой группы формально логической процедуры составления плана. Но это не значит, что навыки составления плана задачи можно отложить на второй или третий год обучения. Легче начать эту работу исподволь, когда учащиеся решают задачи в два действия, чтобы иметь возможность на втором и третьем году решать задачи в три и более действий.

При решении задач в два действия, подобно тому, как это было при решении простых задач, не следует требовать от детей записи условия задачи и ее вопросов. Задачу они повторяют только устно и устно же формулируют вопросы к ней. Необходимо лишь нумеровать действия и ставить при числах наименования по правилам, которые уже указывались.

Виды задач на сложение и вычитание в два действия. Задачи на сложение и вычитание в два действия могут представлять собою следующие комбинации этих действий:

1. два сложения;
2. сложение и вычитание из полученного числа;
3. вычитание и сложение;
4. два вычитания;
5. сложение и вычитание из данного числа.

Разберем каждый из этих видов в отдельности и попутно выясним, с какого вида задач в два действия следует начинать с детьми проработку сложных задач.

1. З а д а ч а в д в а с л о ж е н и я есть чаще всего задача хоть и в два действия, но *в один вопрос*, независимо от того, в каком порядке будем мы производить самые действия. Исключением являются задачи, в которых применяется выражение *на столько то больше*, но при изучении второго десятка такие задачи еще не вводятся. Два вопроса можно поставить к задаче в два сложения еще и в том случае, когда одно из этих действий задано в терминах вычитания, например:

Мальчик купил карандаш за 15 копеек, перо за 2 копейки и у него еще осталось 3 копейки. Сколько всего денег было у мальчика?

Вот вопросы к этой задаче: 1) сколько денег истратил мальчик? и 2) сколько всего денег было у мальчика? Но догадливый ученик и эти два вопроса сумеет соединить в один. Отсюда вывод: задача в два сложения не может считаться образцом сложной задачи. Во всяком случае нецелесообразно учить детей решать сложные задачи на задачах в два сложения.

2. Вот образец задачи н а с л о ж е н и е и в ы ч и т а н и е и з п о л у ч е н н о г о ч и с л а:

В одном куске было 9 метров ситцу, в другом 8 метров. На шитье передников пошло 15 метров. Сколько ситцу осталось?

У этой задачи две отличительных особенности: во-первых, это одна из, так называемых, приведенных задач,[1] у которых план решения как бы продиктован планом изложения; во-вторых, эту задачу удобно решать только одним способом. Таким образом, это один из легких и четких видов задач в два действия.

3. Задача на вычитание и сложение обычно может решаться несколькими способами.

Вот пример такой задачи:

В шкафу 78 книг. Из шкафа взяли 15 книг, возвратили обратно 12 книг. Сколько теперь книг в шкафу?

Решение: 78 – 15 = 63; 63 + 12 = 75. Или: 15 – 12 = 3; 78 – 3 = 75. Или: 78 + 12 = 90; 90 − 15 = 75.

Такая неопределенность может осложнить и без того нелегкий для учащихся первого класса процесс решения задачи в два вопроса. Поэтому начинать с таких задач было бы неправильно. Но в дальнейшем они полезны для развития детского творчества.

4. Задача в два вычитания также чаще всего решается не одним способом, например:

Купили 20 литров керосина. В первую шестидневку израсходовали 8 литров, во вторую 5 литров. Сколько керосина осталось? Решение: 20 − 8 = 12; 12 − 5 = 7. Или: 8 + 5 = 13; 20 − 13 = 7.

Правда, задача в два вычитания, в которой применяется выражение: *на столько-то меньше* решается одним способом. Но такие задачи вводятся позднее, при изучении первой сотни. Таким образом, для начала и этот вид задач в два действия мало пригоден.

5. Задача на сложение и вычитание из данного числа есть не что иное, как задача в два вычитания. Это легко видеть на только-что упомянутой задаче о керосине. Ее можно решать либо двумя вычитаниями, либо сложением и вычитанием из данного числа. При последнем способе решения эта задача должна рассматриваться, как неприведенная, а потому она труднее, чем задача на сложение и вычитание из *полученного* числа.

Из рассмотрения видов задач на сложение и вычитание в два действия выясняется, что начинать решение сложных задач удобнее всего с задач на сложение и вычитание из полученного числа.

Решение простых задач на умножение и деление.

Выбор действия. Разъяснив на наглядных пособиях смысл выражений *взять по столько-то, разделить по столько-то и разделить на столько-то равных частей*, учитель должен научить детей применять эти термины при

[1] С И. Шохор-Троцкий. – Методика начального курса математики, стр. 47-48.

решении задач. Другими словами, выражения, характеризующие различные жизненные процессы и соотношения между величинами, приводящие к умножению и делению, дети должны уметь переводить на условный арифметический язык.

Всякий раз, когда дети затрудняются точно назвать действие, которым решается задача, приходится снова возвращаться к дидактическому материалу. Особенно часто приходится прибегать к этому приему в случае деления по содержанию в виду большой трудности выбора действия в таких задачах. Не следует забывать, что простая задача на деление по содержанию, заключая в себе одно действие, имеет, в сущности, два вопроса. Первый вопрос — это вопрос о том, сколько раз одно из данных чисел содержится в другом, и второй вопрос — вопрос задачи. Выполняя действие, мы решаем первый вопрос. Чтобы от него перейти к ответу на вопрос задачи, необходимо построить, примерно, следующее рассуждение: карандашей (или тетрадей, или учащихся и т. д., в зависимости от вопроса задачи) будет *столько, сколько раз* одно из данных чисел содержится в другом числе. Обычно это рассуждение высказывается или мыслится короче. Решается задача:

В коробке было 14 красок. Каждому ученику дали по 2 краски. Сколько учеников получили краски?

Учащийся говорит: разделим 14 красок по 2 краски. Получится 7 раз по 2 краски. *Значит было 7 учеников*. Чтобы помочь учащимся сформулировать эту мысль, учитель предлагает им вместо красок отсчитать 14 кружков и разложить эти кружки, согласно условию задачи, по 2 кружка. Точно также, при делении на равные части, учащийся действительно делит спички, кружки, квадратики на указанное в задаче число частей.

Когда выбор действия произведен и задача решена, некоторые преподаватели требуют объяснения, почему задача решается именно таким действием. Например, после решения задачи, в которой надо узнать, сколько листов бумаги пойдет на 5 тетрадей, если на одну тетрадь идет 4 листа, учитель спрашивает: почему надо 4 повторить 5 раз? На это ученик должен ответить: — На одну тетрадь пошло 4 листа, а на 5 тетрадей — *5 раз по 4 листа*. Было бы методически неправильно требовать такого ответа: на одну тетрадь пошло 4 листа, а на 5 тетрадей — в 5 раз больше. Во-первых, дети еще не знакомы с выражением *больше во столько-то раз*, а, во-вторых, это выражение само требует объяснений и потому не может объяснять более простого смысла умножения, когда оно сводится к нахождению суммы нескольких равных слагаемых. Точно так же при делении учитель не должен требовать такого объяснения выбора действия, которое заключало бы в себе выражение *во столько-то раз меньше.*

Запись решения. При записи умножения необходимо следить за тем, чтобы учащиеся ставили множимое на первом месте, а множитель на втором. Другими словами, необходимо добиться, чтобы учащиеся ясно различали множимое и множитель. С этой целью полезно на первых порах записывать решение задачи на умножение двумя способами: и в виде сложения, и в виде умножения. В дальнейшем можно давать рядом такие задачи, которые отличаются одна от другой только порядком сомножителей. Например:

1) На одну тетрадь идет 4 листа бумаги. Сколько бумаги пойдет на 5 тетрадей?

2) На одну тетрадь идет 5 листов бумаги. Сколько бумаги пойдет на 4 тетради?

Если бы дети, решая эти задачи, неправильно разместили множимое и множитель, надо вернуть их к записи умножения в виде сложения и от сложения перейти к умножению:

На *первую* тетрадь пошло 4 листа, на *вторую* тетрадь — 4 листа и т. д. Сколько *раз* по 4 листа пошло на 5 тетрадей? Или: На *первую* тетрадь пошло 5 листов, на *вторую* тетрадь — 5 листов и т. д. Сколько же раз по 5 листов пошло на 4 тетради?

Четкость в различении множимого и множителя, а также двух видов деления достигается правильным употреблением *наименований* в записи этих действий. Записи эти должны иметь следующий вид:

Умножение:

Записывают: 5 коп. × 3 = 15 коп.

Читают: по 5 копеек взять 3 раза, получится 15 копеек.

Деление по содержанию:

Записывают: 15 коп. : 3 коп = 5.

Читают: 15 копеек разделить по 3 копейки, получится 5 раз по 3 копейки.

Деление на равные части:

Записывают: 15 коп. : 3 = 5 коп.

Читают: 15 копеек разделить на 3 равные части, получится по 5 копеек в каждой части.

Поскольку в делении по содержанию полученное число не есть еще ответ на вопрос задачи, надо в этом случае ответ записать отдельно.

Например:

15 коп. : 3 коп. = 5

Ответ: 5 резинок.

Задачи на все действия.

Задачи на все действия в пределах второго десятка. Комбинируя арифметические действия по два, можно создать большое число разнообразных задач. Не все эти комбинации интересны в математическом отношении и не все они жизненны. Нет никакой необходимости охватить в работе с учащимися, особенно на первом году обучения, все эти виды задач.

Если не считать задач в два действия на сложение и вычитание, которые уже рассматривались выше, чаще других в пределах 20 придется пользоваться следующими комбинациями:

1. Умножение и сложение. Например: На платье купили 6 метров ткани по 3 рубля за метр и на 2 рубля прикладу. Сколько стоит материал на платье?

2. Умножение и вычитание из данного числа. Например: На вокзал надо отправить 20 ящиков с машинами. Грузовик отвез 5 раз по 3 ящика. Сколько ящиков еще осталось?

3. Умножение и вычитание из полученного числа: Бригада рабочих выезжала на 3 шестидневки в колхоз; 2 дня из этого времени ушло на дорогу. Сколько дней провела бригада в колхозе?

4. Сложение и деление на данное число: Из одной катушки можно сделать 2 волчка. Ребята сделали сначала 12 волчков, потом еще 8. Сколько катушек пошло на эти волчки? (деление по содержанию). Или: 7 лесорубов должны спилить 6 сосен и 8 берез. Сколько деревьев приходится на каждого лесоруба? (деление на равные части).

5. Вычитание и деление на данное число. Например: На рамку идет 4 бруска. Из 18 брусков сделали несколько рамок и еще осталось 2 бруска. Сколько сделали рамок? (деление по содержанию). Или: От 17 метров проволоки отрезали 4 одинаковых куска и еще осталось 5 метров. Какова длина каждого куска? (деление на равные части).

6. Вычитание и деление на полученное число: Картина в рамке стоит 18 рублей, без рамки — 15 рублей. Сколько рамок можно купить на 12 рублей? (деление по содержанию). Или: с огорода собрали 20 мешков картофеля. Для поросят оставили 17 мешков. Остальной картофель продали за 18 рублей. По какой цене продавали каждый мешок? (деление на равные части).

Задачи на все действия в пределах первой сотни. Эти задачи отличаются от задач в пределах 20-ти, помимо самых чисел, большим разнообразием математического содержания. Особенно интересны в этом концентре те задачи, в которых встречаются новые для учащихся выражения *больше или меньше на столько-то*. Сначала это должны быть задачи в одно действие. Затем идут задачи на сложение и вычитание в два действия. Наконец, появляются задачи, в которых увеличение и уменьшение на несколько единиц сочетается с умножением и делением.

Вот задачи этого рода на сложение и вычитание в порядке возрастающей трудности:

1. Сложение и увеличение на несколько единиц: Октябрята собрали на самолет 12 рублей, потом еще 8 рублей. Пионеры собрали на 10 рублей больше, чем октябрята. Сколько денег собрали пионеры?

2. Увеличение на несколько единиц и сложение: Колхозный ларек продал до обеда 40 литров молока, после обеда на 10 литров больше. Сколько молока продал ларек за весь день?

3. Увеличение на несколько единиц и вычитание: В одном бидоне было 30 литров молока, в другом на 10 литров больше. Из второго бидона продали 20 литров. Сколько еще молока во втором бидоне?

4. Два увеличения на несколько единиц: Три колхоза соревнуются по сбору золы. Первый собрал 70 мешков, второй на 20 мешков больше первого, а третий на 10 мешков больше второго. Сколько золы собрал третий колхоз?

5. Сложение и уменьшение на несколько единиц: В колхозе было 30 пароконных плугов. К весенним работам колхоз получил еще 20 таких плугов. Одноконных плугов на 10 меньше, чем всех пароконных. Сколько в колхозе одноконных плугов?

6. Уменьшение на несколько единиц и сложение. Во время мясозаготовок один колхоз сдал 30 свиней, другой на 10 свиней меньше. Сколько свиней сдали оба колхоза?

7. Уменьшение на несколько единиц и вычитание: В колхозном стаде 70 коров, телят на 20 голов меньше. При мясозаготовках сдали 30 телят. Сколько телят осталось?

8. Два уменьшения на несколько единиц: В кооперативе 80 ведер; кастрюль на 20 штук меньше, чем ведер; сковородок на 10 штук меньше, чем кастрюль. Сколько в кооперативе сковородок?

9. Увеличение и уменьшение на несколько единиц: Во время учебной стрельбы один стрелок выбил 38 очков; другой на 11 очков больше первого; третий на 15 очков меньше второго. Сколько очков выбил третий стрелок?

10. Вычитание и увеличение на несколько единиц: Кисточка стоит 20 копеек. За кисточку и красную тушь заплатили всего 60 копеек. Черная тушь на 10 копеек дороже красной. Сколько стоит черная тушь?

11. Вычитание и уменьшение на несколько единиц: В первом классе 40 учащихся, в первом и во втором классе вместе 70 учащихся, а в третьем классе на 10 человек меньше, чем во втором. Сколько ребят в третьем классе?

Два последних вида задач можно давать только сильному первому классу.

Приведем еще несколько образцов задач, в которых выражения *больше или меньше на столько-то* встречаются в комбинациях с умножением и делением.

1. Увеличение (или уменьшение) на несколько единиц и умножение: Книга без переплета стоит 20 копеек, в переплете на 10 копеек дороже. Сколько стоят 3 книги в переплете?

2. Увеличение (или уменьшение) на несколько единиц и деление: Килограмм кислой капусты стоит 70 копеек: 4 килограмма картофеля на 10 копеек дороже. Сколько стоит 1 килограмм картофеля?

3. Умножение и увеличение (или уменьшение) на несколько единиц: Для рабочих построили 2 новых дома. В одном доме 3 этажа и в каждом этаже по 20 квартир. Во втором доме на 10 квартир больше. Сколько квартир во втором доме?

4. Деление и увеличение (или уменьшение) на несколько единиц: 3 одинаковых мешка муки весят вместе 90 килограммов. Мешок картофеля на 20 килограммов тяжелее мешка муки. Сколько весит мешок картофеля?

ПРИМЕРЫ НА ПЕРВОМ ГОДУ ОБУЧЕНИЯ.

Примеры в пределах первого десятка.

Виды примеров и способы их решения. Отвлеченный пример представляет собою упражнение, в котором действие прямо указано. Решая отвлеченный пример, учащийся не должен заниматься выбором действия, как при решении задачи, но может все внимание сосредоточить на самих вычислениях.

Уже при изучении первого десятка следует давать детям отвлеченные примеры. Они могут быть различны по степени сложности и по назначению.

По степени сложности на этом этапе обучения применяют примеры в одно, два и три действия.

а) 4 + 3	б) 5 + 2 – 4	в) 6 + 1 + 1 + 1	г) 9 – 1 – 1 – 1
7 – 3	7 – 3 + 2	6 + 3	9 – 3

В зависимости от назначения примеры подразделяются следующим образом:

1. Примеры для усвоения вычислительных приемов, которые являются вместе с тем средством усвоения основных свойств арифметических действий.

а) 5 + 2 + 2	б) 9 – 2 – 2	в) 2 + 6	г) 8 – 2
5 + 4	9 – 4	6 + 2	8 – 6

2. Примеры для усвоения и закрепления вычислительных навыков. Эти примеры можно располагать в определенной последовательности или в случайном порядке. В первом случае чаще всего они служат в качестве отправной точки при изучении новой ступени сложения и вычитания или для подведения итогов ее проработки. Во втором случае они даются в целях тренировки.

а) 1 + 2	б) 9 – 2	в) 7 – 2 + 4	г) 8 – 5 + 4 + 3
3 + 2	7 – 2	6 + 4 – 2	1 + 4 + 5 – 3
5 + 2	5 – 2	8 – 3 – 4	7 – 4 + 5 – 2
7 + 2	3 – 2	6 – 2 + 4	2 + 4 + 3 – 5

3. Примеры для проверки пройденного, которые даются после окончания определенного раздела курса. Это должны быть примеры в одно

действие, чтобы учитель мог точно установить существующие у учащихся пробелы. Желательно также, чтобы данная группа примеров давала исчерпывающий материал в отношении к тому разделу курса, которого касается проверка, иначе учитель не получит полной картины успешности учащихся. Так после проработки прибавления и отнимания четырех и пяти дается следующий набор примеров:

2 + 4	2 + 5	1 + 4	6 + 2	8 – 5
7 – 5	7 – 4	6 – 5	1 + 5	5 + 5
5 + 4	3 + 4	4 + 4	4 + 5	10 – 4
8 – 2	10 – 5	3 + 5	9 – 4	9 – 5

В данном случае, как и вообще при проверке пройденного, примеры располагаются в случайном порядке, чтобы учащийся не мог предвидеть ответа. В этом отношении они отличаются от примеров для усвоения вычислительных приемов, которые часто строятся с таким расчетом, чтобы по соотношению между результатами действий учащийся мог подметить определенную числовую закономерность.

4. П р и м е р ы с в о п р о с и т е л ь н ы м з н а к о м, которые обычно вводятся при повторении состава чисел первого десятка. Если решать эти примеры посредством вычислений, то, в отличие от других примеров, пришлось бы заняться прежде всего выбором действия. Но выбор действия в данном случае труден для учащихся первого класса, да в нем и нет надобности: дети решают эти примеры, не вычисляя, на основе знания состава чисел первого десятка. Дело сводится к тому, что учащийся переписывает в тетрадь пример с вопросительным знаком, а под ним пишет тот же пример в решенном виде, подчеркнув при этом число, которое заменяет знак вопроса:

а) 5 + ? = 6	б) 3 + ? = 7	в) ? + 4 = 9	г) ? + 8 = 10
5 + $\underline{1}$ = 6	3 + $\underline{4}$ = 7	$\underline{5}$ + 4 = 9	$\underline{2}$ + 8 = 10

Дети читают эти записи так:

а) 5 да сколько будет 6? 5 да 1 будет 6.

б) Сколько надо прибавить к 3, чтобы получилось 7? К 3 прибавить 4, получится 7.

в) К какому числу надо прибавить 4, чтобы получилось 9? К 5 прибавить 4, получится 9.

г) К какому числу надо прибавить 8, чтобы получилось 10? К 2-м прибавить 8, получится 10.

При изучении первого десятка дети решают только такие примеры с вопросительным знаком, в которых зависимость между числами выражается знаком сложения.

Беглый счет. Под беглым счетом понимают цепь арифметических действий, связанных между собою таким образом, что результат предыдущего действия становится данным следующего. Беглый счет дается детям так:

К 3 прибавить 4 (пауза). От того, что получится, отнять 5 (пауза). К полученному числу прибавить 8 (пауза). От полученного числа отнять 3 (пауза). Сколько получилось?

Во время пауз дети поднимают руки, по мере того, как успевают вычислить ответ. Учитель ждет, пока большинство учащихся поднимет руки, и только после этого переходит к следующему действию. На первых порах не стоит давать больше трех-четырех действий подряд. Окончательный ответ дети говорят вслух по вызову учителя: скажи ты, ты, а у тебя сколько? и т. д. В заключение учитель объявляет верный ответ: верный ответ 7 (или: получится 7).

Когда дети привыкнут к беглому счету, его можно задавать короче, а именно так: 3 да 4, отнять 5, прибавить 8, отнять 3.

Надо ли проверять беглый счет, т. е. надо ли предложенную цепь примеров решать заново, чтобы исправить неверные ответы? На этот вопрос следует ответить отрицательно. Цель беглого счета — учет навыков детей, а не сообщение вычислительных приемов.

Занятная для детей разновидность беглого счета носит характер игры. Учитель предлагает каждому учащемуся задумать число не больше 5. Затем идет обычный беглый счет: к задуманному числу прибавить 3, отнять 2, прибавить 4, отнять 5. У всех должно получиться задуманное число.

Примеры в пределах второго десятка.

Виды примеров и способы их решения. При изучении второго десятка приходится иметь дело с теми же категориями примеров, что и раньше.

1. Чтобы усвоить приемы сложения и вычитания, дети решают группы специально подобранных примеров:

а) 5 + 3	б) 17 + 3	в) 2 + 6
15 + 3	3 + 17	2 + 16
7 – 4	20 – 3	18 – 3
17 – 4	20 – 17	18 – 13
г) 8 + 2 + 3	д) 9 + 7	
8 + 5	7 + 9	
15 – 5 – 2	16 – 7	
15 – 7	16 – 9	

Группы а), б) и в) подводят к внетабличному сложению и вычитанию, остальные поясняют табличные.

Переход от сложения к умножению, применение распределительного свойства умножения также поясняется на примерах:

а) $2 + 2 + 2 + 2 + 2$ $\quad 2 \times 5$ б) $2 \times 5 \quad 2 \times 3$ $\quad 2 \times 8$ в) $2 \times 5 \quad 2 \times 4$ $\quad 2 \times 9$

и т. д.

Наряду с примерами для усвоения математических понятий, учащиеся решают примеры для закрепления навыков и для проверки пройденного.

Кое-что новое вносится в примеры с вопросительным знаком. До сих пор дети решали только те из них, в которых зависимость между числами выражалась знаком сложения. Теперь в этих примерах появляется и знак вычитания. Впервые они вводятся в качестве подготовительного упражнения к сложению и вычитанию с переходом через десяток: наряду с примерами, которые встречались и раньше (8 + ? = 10, ? + 6 = 10), даются новые примеры: 10 − ? = 5, 17 − ?= 10.

Все возможные виды примеров с вопросительным знаком на сложение и вычитание дети решают в связи с повторением состава чисел второго десятка:

а) 9 + ? = 11 б) ? + 7 = 13 в) 12 – ? = 5 г) ? – 6 = 8

Решение таких примеров основано, как и раньше, на знании состава чисел. Выбор действия и вычисления тут не нужны.

2. При изучении умножения и деления вводятся смешанные примеры на все действия. При этом в некоторых случаях приходится употреблять скобки:

а) $(11 - 9) \times 4$
$2 \times (16 - 7)$

б) $(8 + 7) : 3$
$(20 - 2) : 6$

в) $18 : (16 - 14)$

В других случаях, согласно существующим правилам, скобки не обязательны:

а) $(7 \times 2) + 6 = \underline{7 \times 2 + 6}$
$(2 \times 9) - 15 = \underline{2 \times 9 - 15}$
$2 + (6 \times 3) = 2 + 6 \times 3$
$17 - (3 \times 4) = 17 - 3 \times 4$

б) $(12 : 2) + 8 = \underline{12 : 2 + 8}$
$9 + (18 : 3) = 9 + 18 : 3$
$12 - (15 : 3) = 12 - 15 : 3$

Но на первом году обучения было бы преждевременно давать все эти сложные примеры без скобок. На первом году можно освобождать от скобок только подчеркнутые примеры.

При чтении примеров со скобками позволительно, вместо образных выражений *взять по столько-то, разделить по столько-то и разделить на столько-то равных частей,* говорить просто *умножить* и *разделить*. Пример 2 × (16 — 7) читают так: 2 умножить — скобки открыть — от 16 отнять 7 —

скобки закрыть; пример 18 : (14 − 11) читают так: 18 разделить — скобки открыть — от 14 отнять 11 — скобки закрыть.

Беглый счет ведется так же, как и при изучении первого десятка. Видоизменением его можно считать следующее упражнение. Учитель молча, медленно пишет на доске длинный пример, делая небольшую остановку перед каждым новым действием:

$$5 + 7 - 3 + 6 - 5 \text{ или } 4 \times 5 - 6 - 5 + 3$$

Когда учитель ставит знак = , у большинства детей ответ уже должен быть готов.

Примеры в пределах первой сотни.

Как и в предшествующей работе, специально подобранные группы примеров служат средством для усвоения вычислительных приемов:

а) 4 + 2	б) 8 − 5	в) 45 + 3	г) 59 − 4
54 + 2	68 − 5	45 + 23	59 − 24

При проработке первой сотни примеры с вопросительным знаком можно давать только в связи с изучением сложения и вычитания круглых десятков, так как учащиеся, решая эти примеры, по-прежнему, не вычисляют, а исходят из знания состава чисел. В отношении круглых десятков это возможно, при двузначных числах это было бы трудно. Поэтому примеры с вопросительным знаком для двузначных чисел переносятся на второй год.

Примеры со скобками дети по-прежнему решают в уме; в тетрадь они переписывают только самый пример и окончательный ответ. Но так как здесь труднее, чем это было до сих пор, удерживать в памяти результаты промежуточных вычислений, можно ввести и более подробную запись. Это особенно полезно в тех случаях! когда пример состоит из трех действий:

а) 98 − (13 + 22) = 98 −35 = 63
б) (30+40) − (60 − 20) = 70 − 40 = 30

При решении примеров со скобками не надо позволять детям писать ответы над скобками.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ.

Общие замечания.

Для поддержания у детей интереса к математике, на первом году и особенно при изучении первого десятка применяются математические игры, которые могут в это время в значительной мере, заменить обычные числовые упражнения.

Играя, мы отдаем себя, так сказать, на волю случая. Поэтому, игра не может применяться в то время, когда идет проработка нового материала, и упражнения должны быть расположены в определенной системе. Но для закрепления навыков полезно и уместно пользоваться игрой.

Опишем некоторые математические игры для первого года обучения.

Счет до пяти.

Игра в квартеты состоит из 20 числовых фигур, построенных из кружков, квадратиков, треугольников и прямоугольников. Каждое число от 1 до 5 представлено в четырех видах, при помощи каждой из названных форм.

Все карточки смешиваются и раздаются играющим, которых может быть 4–5 человек. Каждый из них складывает свои карточки в кучку лицевой стороной вниз. Порядок, в котором сложены карточки, во все время игры не должен нарушаться“. Начинающий игру открывает верхнюю из своих карточек и кладет ее на середину стола. Следующий делает то же самое по отношению к своей верхней карточке и кладет ее рядом с первой, если она изображает то же самое число. В противном случае карточка остается у него на руках и подкладывается под остальные. Так поступают до тех пор, пока на столе не соберется полный „квартет“ из четырех картинок. После этого следующий по очереди играющий открывает своей карточкой новый „квартет“. Выиграл тог, кто первый освободится от своих карточек.

„Не зевай“. Игра состоит из 20 числовых фигур (см. игру „квартет“) и из 20 чисел, соответствующих этим фигурам.

Все карточки смешиваются и раздаются играющим, которых должно быть четверо. Каждый из них складывает свои карточки в кучку лицевой стороной вниз. Порядок, в котором сложены карточки, во все время игры не должен нарушаться.

Игру начинают сразу все 4 партнера: каждый открывает свою верхнюю карточку и кладет ее перед своей кучкой. При этом может оказаться следующее:

1. На одной карточке число, а на другой соответствующая числовая фигура; обе эти карточки сбрасываются.

2. На двух карточках числа, а на других двух — соответствующие числовые фигуры; в таком случае сбрасываются все 4 карточки.

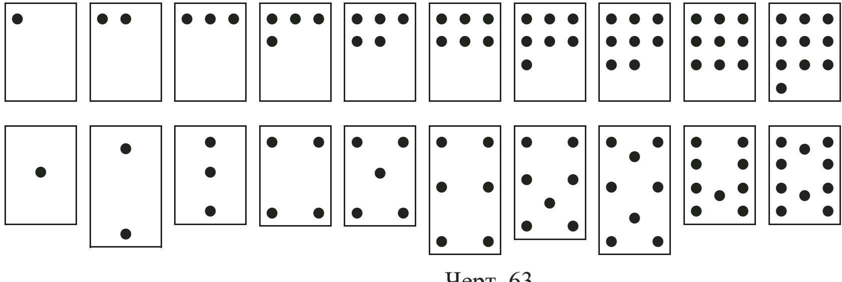
3. Во всех остальных случаях, в частности, когда одному числу соответствуют две или три фигуры или одной фигуре два или три числа — ни одна карточка не может быть сброшена.

После этого все четыре партнера снова открывают одновременно по одной карточке и сбрасывают, что можно. Тот, кто успеет раскрыть все свои карточки, должен перевернуть всю кучку лицевой стороной вниз и продолжать игру в прежнем порядке. Выиграл тот, кто первый освободится от своих карточек.

Счет и действия до десяти.

Описанную только что игру не *зевай* можно распространять и на все числа первого десятка, в то время, когда изучается счет до десяти. В этом случае можно воспользоваться числовыми фигурами Макиндер и еще каким-нибудь набором числовых фигур от 1 до 10. Будем иметь, например, следующие 20 числовых фигур (см. черт. 63).

К этим 20 числовым фигурам надо присоединить 20 карточек с соответствующими числами. Правила игры остаются без изменения. Счет до десяти можно проработать и на *лото с картинками.*



Черт. 63.

Лото с картинками. На картинках изображены группы различных предметов (грибы, желуди, листья, колосья, бабочки, жуки, утки, лодочки, флажки, яблоки, груши, вишни, морковки и т. д.) в количестве от 1 до 10. Картинки помещаются на таблицах, по 4 картинки на каждой таблице, и на отдельных карточках. На каждой такой карточке рядом с изображением предметов обозначено цифрами их число.

Каждый играющий получает по таблице. Отдельные карточки находятся у ведущего игру. Вынимая одну из карточек, он называет число изображенных на ней предметов: 5 листьев, 3 уточки, 6 морковок и т. п. Играющий, у которого окажется такая картинка на таблице, получает карточку и закрывает ею картинку. После этого ведущий игру вынимает следующую карточку и т. д. Выиграл первым тот, кто раньше всех закроет все 4 картинки на своей таблице. Игра может продолжаться: выигрывает второй, третий и т. д.

Различного рода лото можно применять и для усвоения действий в пределах 10. Опишем два таких лото.

Лото из открыток. Чтобы приготовить такое лото, надо иметь 15 художественных открыток и 15 таблиц такой же величины. Каждую таблицу и каждую открытку делят на 6 равных клеток. В клетках на таблицах пишут примеры на сложение и вычитание: 2 + 4 = , 3 + 5 = и т. д. (всего в пределе 10 существует 90 различных случаев сложения и вычитания). На оборотной стороне открытки в соответствующих клетках пишут решения этих примеров: 2 + 4 = 6, 3 + 5 = 8 и т. д. После этого открытки разрезают на куски.

Таблицы раздают играющим, а куски открыток остаются на руках у ведущего игру, который вынимает один за другим куски открыток и читает написанные на них примеры без ответа. Ученик, у которого на таблице окажется такой пример, читает его с ответом, получает соответствующий кусок открытки и закрывает им свою клетку. Когда ученик закроет все клетки своей таблицы, из кусков у него составится целая картинка. Такой ученик считается выигравшим. За первым выигрывает второй, третий и т. д.

Подвижное лото могут быстро сделать сами учащиеся. Оно состоит из 90 примеров (все случаи сложения и вычитания в пределе 10) и 90 ответов к ним. Каждый пример и каждый ответ пишется на отдельной карточке.

Примеры складываются в коробку, а ответы раздаются играющим по 6 ответов каждому. Свои ответы каждый играющий раскладывает перед собой на столе лицом

кверху. Ведущий игру вынимает из коробки пример и читает его вслух. Играющие решают про себя примеры и ищут среди своих карточек ответ. Каждый, кто нашел у себя соответствующую карточку, переворачивает ее лицом вниз. Выиграл тот, кто первый перевернет все свои карточки. По вынутым из коробки примерам учитель может проверить, правильно ли вычислял выигравший ученик.

Можно играть иначе. Ученики получают каждый по 4 примера, а ответы складываются в коробку. Учитель вынимает и читает вслух ответ. Каждый, кто найдет у себя карточку с подходящим примером, переворачивает ее лицом вниз. Выиграл тот, кто первый перевернет все свои карточки.

Магические квадраты. Игра состоит из квадрата, разделенного на 9 равных клеток, и 9 цифр. Цель игры — разложить цифры на квадрате так, чтобы сумма чисел в каждом горизонтальном ряду и в каждом вертикальном столбце равнялась одному и тому же числу. Можно иметь несколько разных наборов цифр; один от другого они должны отличаться цветом или окантовкой. Каждый набор удобнее сложить в отдельный конверт или коробочку. На конверте (или коробочке) надо обозначить сумму, которая должна получиться в каждом ряду и в каждом столбце при раскладывании цифр.

Вот несколько образцов таких наборов:

1) Цифры 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4 и 5. Сумма 9.
2) Цифры 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4 и 5. Сумма 10.
3) Цифры 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5 и 6. Сумма 10.

$4 + 5 - 3$
$5 - 1 + 6$
$6 - 3 + 2$
$10 + 4 - 3$
$3 + 6 - 5$

Круговые задачи. На отдельных карточках пишут несколько примеров. Ответ первого примера служит первым числом второго, ответ второго примера — первым числом третьего и т. д. Карточки перемешиваются и даются ученику, который начинает решать примеры с любого, например, с третьего. Решив пример $6 - 3 + 2 = 5$, он отыскивает пример, который начинается с числа 5, решает его и переходит к следующему, который начинается числом 10 и т. д. Решив последний пример, в данном случае $4 + 5 - 3$, учащийся получает в ответе число 6, т. е. как раз то число, которым начинался первый решенный им пример.

Желательно иметь несколько наборов *круговых задач*. Один от другого они могут отличаться цветом бумаги или окантовкой. Полезно решать эти примеры не только устно, но и записывать их в тетради. Ученик записывает примеры один за другим, по мере того, как он их решает. Запись может иметь следующий вид:

$(6) - 3 + 2 = 5$
$5 - 1 + 6 = 10$
$10 - 4 - 3 = 3$
$3 + 6 - 5 = 4$
$4 + 5 - 3 = (6)$

Таким образом „круг“ замыкается, и это свидетельствует о том, что все примеры решены правильно.

Пользуясь круговыми задачами, написанными на отдельных карточках, можно также играть в „цепочку“: раскладывать примеры в один ряд так, чтобы начало второго могло служить ответом первого, начало третьего — ответом второго и т. д.

Счет и действия до 20 и до 100.

При изучении второго десятка применяются те же игры, что и раньше: разного рода лото, магические квадраты, круговые задачи. В соответствии с изучаемым концентром изменяются только числа и действия.

При проработке сложения и вычитания можно ввести, кроме указанных раньше, новую игру — *волчок*.

Волчок. Из папки вырезывают правильный шестиугольник, у сторон которого пишут цифры 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Через центр шестиугольника протыкают спичку. Получается род волчка. Взяв спичку за кончик, ученик приводит волчок во вращение, после которого волчок падает на одну из сторон шестиугольника. Ученик записывает цифру, стоящую у этой стороны, и передает волчок товарищу, который проделывает то же и т. д. Каждый складывает свои числа. Выигрывает тот, у кого раньше всех получится ровно 15. Если сумма окажется больше 15, надо от нее отнять 15 и вести новый счет, начиная с остатка. Играют двое — трое.

Опишем еще два вида лото, которые могут применяться при изучении умножения и деления.

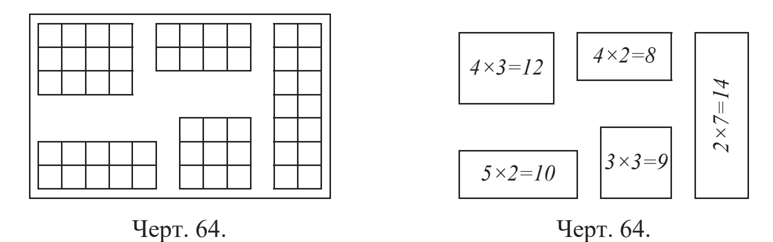
Лото из квадратиков состоит из 6 таблиц, на которых изображены прямоугольники и квадраты, составленные из квадратиков. Всего таких фигур 27, применительно ко всем случаям умножения в пределах 20:

2 × 2	2 × 7	3 × 2	4 × 2	5 × 2	7 × 2
2 × 3	2 × 8	3 × 3	4 × 3	5 × 3	8 × 2
2 × 4	2 × 9	3 × 4	4 × 4	5 × 4	9 × 2
2 × 5	2 × 10	3 × 5	4 × 5	6 × 2	10 × 2
2 × 6		3 × 6		6 × 3	

Вот образец одной из таблиц (черт. 64). На ней графически представлены следующие произведения:

4 × 3 4 × 2 2 × 7 5 × 2 и 3 × 3

Кроме фигур, изображенных на таблицах, на руках у ведущего игру должны быть отдельные прямоугольники и квадраты, точно таких же размеров, как на таблицах, с соответствующими надписями.

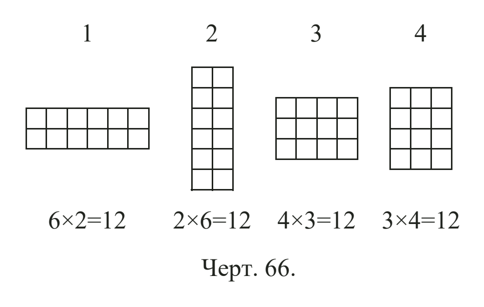


Черт. 64. Черт. 64.

Вот фигурки к нашей таблице (черт. 65). Учитель вынимает одну из таких фигурок и читает написанный на ней пример без ответа. Ученик, у которого окажется таблица с изображением соответствующего прямоугольника или квадрата, говорит ответ, получает фигурку и закрывает ею свой прямоугольник или квадрат. Выигрывает тот, кто первый закроет все фигуры на своей таблице.

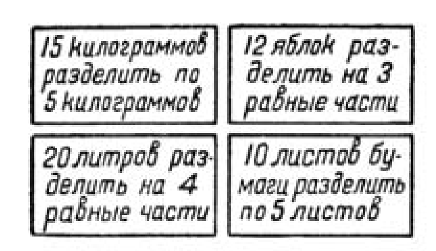
При повторении состава чисел до 20 из сомножителей можно играть в ту же игру несколько иначе. Вынув фигурку, учитель читает только написанный на ней ответ. Играющие мысленно заменяют это число произведением двух сомножителей и ищут на своей таблице такой прямоугольник или квадрат, который отвечал бы данному произведению. Так, если названо число 12, подходящими могут оказаться следующие произведения: 2 × 6, 6 × 2, 3 × 4 и 4 × 3. Из соответствующих (по числу квадратиков) фигурок на таблицах только *одна* подойдет по форме и положению к той комбинации сомножителей, которая представлена фигуркой на руках у учителя. Это может быть одна из фигур, изображенных на черт. 66 (см. стр. 170).

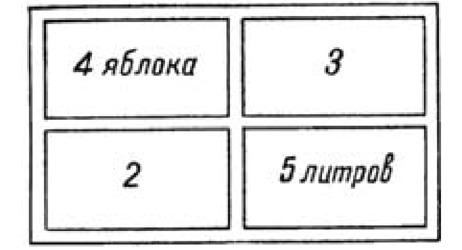
Каждой из этих фигур соответствует только та комбинация сомножителей, которая под ней записана, поскольку за *множимое* мы всегда принимаем число квадратиков в одном горизонтальном ряду, а за *множитель* — число таких рядов. Так, если учитель вынул прямоугольник с надписью 4 × 3 = 12, он передает его тому из учащихся, у которого на таблице изображена фигура № 3. Выигрывает тот, кто первый закроет все фигуры на своей таблице.



Черт. 66.

Лото „по“ и „на“ можно приготовить из 6 художественных открыток и 6 таблиц такой же величины. Каждую таблицу и каждую открытку делят на 4 равные клетки. В каждой клетке на оборотной стороне открытки пишут по одной задаче на деление (по содержанию или на равные части). В соответствующих клетках на таблице пишут ответы на эти задачи, причем в зависимости от вида деления это будут числа с наименованиями или без наименований. Открытки с задачами разрезают на куски так, чтобы на каждом куске было по одной задаче. Вот образец разрезанной на куски открытки с задачами и соответствующей таблицы с ответами:





Черт. 67.

Необходимо помнить, что куски с задачами придется раскладывать на таблицах надписью вниз, а потому то, что на изнанке открытки находится слева, на таблице должно помещаться справа и наоборот. Необходимо также иметь в виду, что на деление по содержанию не может быть больше 9 разных ответов (отвлеченные числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10). Остальные ответы будут отличаться от них наименованиями.

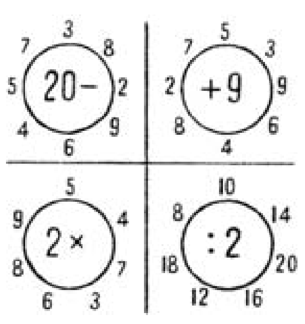
Каждый играющий получает по таблице. Учитель вынимает кусок открытки, читает написанную на нем задачу и передает его тому из учащихся, у которого на таблице оказался ответ. Если ученик, закрывая клетки своей таблицы, решил все задачи правильно, из кусков открытки должна составиться картинка. Считается, что такой ученик выиграл первым. За ним выигрывает второй, третий и т. д.

Укажем еще одну игру, которую можно применить к любому действию в пределах второго десятка и первой сотни. Г. Поляк в своем пособии „Счет и игра“ называет ее *игрой в молчанку*.

Игра в молчанку. Учитель рисует на доске один из таких кругов с числами. Затем он вызывает к доске одного за другим учащихся и молча указывает на одно из чисел, записанных по окружности. Ученик производит над этим числом, и над числом

написанным в центре круга, указанное действие и молча пишет на доске полученный ответ. Следующий ученик проделывает то же самое, пока все примеры по кругу не будут решены. Если один из вызванных учеников напишет на доске неправильный ответ, учитель его зачеркивает и вызывает другого ученика для решения того же примера.

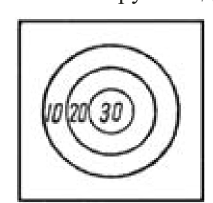
Для того, чтобы сделать эту игру более увлекательной, можно разделить класс на две партии. За каждый правильно решенный пример учитель выдает ученику марку (цветной кружок или квадратик). В обеих партиях учеников должно быть поровну. Когда все они перебывают по одному разу у доски, каждая партия подсчитывает свои марки. Выигрывает та партия, которая заработала больше марок.



Черт. 68.

При проработке первой сотни на первом году обучения можно применять уже известные нам игры и дидактический материал: лото, круговые задачи, счет по кругу (игра в молчанку). Менее пригодны здесь магические квадраты и волчок, так как одного сложения круглых десятков для построения этих игр недостаточно, а сложение и вычитание двузначных чисел прорабатывается только частично, так что было бы преждевременно вводить элемент случайности, а вместе с тем и произвола в подбор и комбинации чисел.

Опишем только одну новую игру, которую можно устроить на школьном дворе с наступлением более теплых весенних дней. Это игра рассчитана на сложение и вычитание круглых десятков.



Черт. 69.

При помощи таза и тарелок рисуют на плотной бумаге концентрические круги (черт. 69), прикрепляют бумагу к стене дома или к забору и бросают по очереди мяч, стараясь попасть в один из кругов. При этом каждый играющий должен складывать числа кругов, в которые попадает его мяч. Выигрывает тот, кто первый наберет ровно 80 очков. Набравший больше 80 очков, должен отнять 80 от полученной суммы и начинать счет с остатка.

Игру эту можно поставить иначе: бросать кольца на втулки или в пролеты лестницы, приставленной к стене. Каждая втулка или каждый пролет лестницы должны иметь свое число очков. В остальном правила игры остаются те же, что и при попадании в круг.

ВТОРОЙ ГОД ОБУЧЕНИЯ

ПЕРВАЯ СОТНЯ.

ЦЕЛЬ И СОДЕРЖАНИЕ КОНЦЕНТРА ПЕРВОЙ СОТНИ.

Общие замечания. Изучение первой сотни начинается на первом году обучения. О целесообразности выделения этого концентра в особую главу курса уже говорилось выше (стр. 128). Там же был более подробно разобран тот материал концентра ста, который включается в программу первого года. На втором году изучается остальная, значительно большая часть этого раздела курса. Особого внимания заслуживает изучение таблицы умножения и деления, которая целиком заключается в пределах первой сотни, и твердое знание которой наизусть должно быть достигнуто на втором году обучения. Здесь же учащиеся должны приобрести значительную беглость в сложении и вычитании, а также во внетабличном умножении и делении, так как по образцу этих вычислений строятся вычисления на всех последующих ступенях курса начальной арифметики.

Сложение и вычитание. Простейшие случаи сложения и вычитания были описаны в предыдущей части (стр. 138). Остается рассмотреть более трудные случаи сложения и вычитания без перехода через десяток, когда сумма единиц слагаемых *равна десяти* и когда уменьшаемое состоит из одних только десятков. А затем надо изучить сложение и вычитание с переходом через десяток, когда сумма единиц слагаемых *больше десяти*, и когда число единиц уменьшаемого *меньше* числа единиц вычитаемого.

Смысл сложения раскрывается в полной мере уже на первом году обучения. Вычитание на первом году обучения дети связывают с выражениями *отнять* и *уменьшить на столько-то.* На втором году они должны узнать, что вопрос *на сколько одно число больше или меньше другого* тоже решается вычитанием. Решение этого вопроса носит название *разностного сравнения.*

Умножение и деление. На втором году обучения мышление учащихся продолжает оставаться конкретным. Детям в это время понятно только то, что может быть показано, проделано непосредственно на предметах и что затем сохраняется памятью в виде *образа*. Поэтому умножение они продолжают понимать как сложение равных слагаемых. То же относится к делению: по-

скольку двум разным видам задач на деление соответствуют разные образы, в работе с учащимися второго года приходится по-прежнему различать два вида деления — деление по содержанию и деление на равные части.

Постепенно и очень осторожно наряду с образными выражениями *взять по столько-то, разделать по столько-то* и *разделить на столько-то равных частей* вводятся отвлеченные выражения *умножить и разделить на столько-то*. Выражение *разделить на столько-то* заменяет *оба* образных выражения. Введение этого выражения связывается с последним этапом в изучении деления, когда виды деления сопоставляются, и когда учащиеся замечают, что, делим ли мы 35 по 5 или 35 на 5 равных частей, в обоих случаях получается одно и то же число 7. Однако, замена образных выражений отвлеченным термином не должна пониматься, как уничтожение качественной разницы между видами деления, как их обезличка. Наоборот, на основе подмеченного сходства, позволяющего сделать некоторое обобщение, дети должны еще отчетливее видеть разницу между делением по содержанию и делением на равные части.

Изучая умножение и деление на втором году, дети знакомятся с выражениями *больше и меньше во столько-то раз у увеличить и уменьшить во столько-то раз*. Они узнают также, что вопрос, *во сколько раз одно число больше или меньше другого*, решается делением. Другими словами, они знакомятся с *кратным сравнением.*

Табличное и внетабличное умножение и деление. Совокупность всех случаев умножения однозначных чисел попарно вместе с соответствующими случаями деления составляет *таблицу умножения и деления в пределах* 100. Все остальные случаи умножения и деления в пределах 100 называются *внетабличными*. Таким образом, к внетабличным относятся все случаи умножения двузначного на однозначное и однозначного на двузначное, если произведение этих чисел не превышает 100, и все соответствующие случаи деления.

При изучении табличного умножения, наряду с приемом набирания равных слагаемых, на втором году обучения выступает более отчетливо, чем на первом году, прием, основанный на *распределительном* свойстве умножения. Так, умножая 8 на 7, мы умножаем 8 на 5, затем 8 на 2 и полученные числа складываем. Можно и иначе группировать слагаемые, а именно: 4 умножаем на 7 и к 28 прибавляем 28. На втором году при вычислении произведения, например 7×8, можно основываться на перемещении сомножителей, т. е. на том, что $7 \times 8 = 8 \times 7$. Что касается табличного деления, то попрежнему приходится в основном опираться на взаимосвязь между умножением и делением, как действием, обратным умножению.

Приемы внетабличного умножения и деления основаны на *распределительном* свойстве этих действий, которые в данном случае используются применительно к десятичному составу числа. Например: $14 \times 3 = 10 \times 3 + 4 \times 3$, и $85 : 5 = 50 : 5 + 35 : 5$. При делении, как мы видим, слагаемые, на которые мы разлагаем делимое, могут и не совпадать с разрядными слагаемыми, что, вообще, характерно для обратных действий. Кроме указанного основного вычислительного приема, здесь же мы пользуемся приемом *перестановки сомножителей*, а также приемом последовательного умножения и деления, основанным на *сочетательном свойстве* этих действий. Например, вместо того, чтобы умножать 4 на 16, умножаем 16 на 4, или же вычисляем результат умножения и деления следующим образом: $12 \times 4 = (12 \times 2) \times 2$, а также $72 : 4 = (72 : 2) : 2$.

Таблица умножения и деления. Изучение таблицы умножения и деления является основной задачей второго года обучения. Результаты табличного умножения и деления должны быть усвоены наизусть. Необходимо поэтому расположить все эти случаи в определенной последовательности и изучать *каждый* из них в отдельности. В этом отношении надо отличать табличное умножение и деление от внетабличного, когда изучается не отдельный случай, а отдельный вычислительный прием, характерный для целой группы примеров.

Принципы построения таблицы умножения и деления в пределах 100 те же, что и для таблицы в пределах 20 (см. стр. 104). Сначала мы прорабатываем умножение, расположив его элементы по постоянному множимому, и попутно изучаем *деление по содержанию*. Затем повторяем таблицу умножения, расположив его элементы по постоянному *множителю*, и в то же время изучаем *деление на равные части*.

Состав чисел первой сотни. Когда табличное и внетабличное умножение и деление проработано, необходимо еще раз повторить пройденный материал, расположив все случаи табличного умножения и деления по *числам*. В пределах этих чисел надо повторить и внетабличное умножение и деление. Знание наизусть последних случаев на втором году обучения не обязательно, но в дальнейшем необходимо добиваться полной беглости в вычислениях как по отношению к табличному, так и по отношению к внетабличному умножению и делению.

Содержание концентра первой сотни. Теперь мы уже можем указать в основном содержание концентра первой сотни:

1. Сложение и вычитание в пределах 100.
2. Умножение и деление в пределах 100.
3. Состав чисел первой сотни.

При этом должны быть усвоены следующие понятия и навыки:

1. Понятие о вычитании, как о разностном сравнении; об умножении, как об увеличении во столько-то раз; о делении на равные части, как об уменьшении во столько-то раз, и о делении по содержанию, как о кратном сравнении.

2. Понятие (в зачаточной форме) основных свойств умножения и деления, на которые опираются их вычислительные приемы.

3. Понимание двух видов деления, как одного действия деления.

4. Навыки сложения и вычитания без перехода через десяток и с переходом через десяток.

5. Навыки табличного и внетабличного умножения и деления.

6. Знание наизусть таблицы умножения и деления.

Сложение и вычитание в пределах сотни.

Повторение пройденного. На втором году изучаются более трудные случаи сложения и вычитания без перехода через десяток и все случаи сложения и вычитания с переходом через десяток, но начать работу полезно с повторения простейших случаев сложения и вычитания в пределах 100. Попутно необходимо также проверить знания детей в области устной и письменной нумерации.

Повторяя нумерацию, можно познакомить детей с терминами *однозначное число* и *двузначное число*. Число, которое можно записать одною цифрою или *одним знаком*, называется *однозначным*. Число, которое можно записать двумя цифрами или *двумя знаками* называется *двузначным*.

При повторении сложения можно ввести термины *сложение, сложить*. *Сложить* пять и три, это значит, к пяти прибавить три или к трем прибавить пять. Складывая числа, мы делаем *сложение*. Слово сложить употребляется в разговорном языке; дети без труда вкладывают в него определенный арифметический смысл. А если понятно слово сложить, то понятно и близкое к нему слово сложение.

Сопоставляя при повторении такие случаи сложения, как 35 + 2 и 2 + 35, дети уже могут в доступной им форме выразить сущность переместительного свойства сложения. До сих пор, пользуясь приемом перестановки слагаемых, дети воспринимали это свойство сложения применительно к данному *единичному* случаю: к двум прибавить семь трудно; легче прибавить два к семи, или: к трем прибавить девять трудно; легче прибавить к девяти три и т. д. Теперь, сопоставляя примеры, которые отличаются только порядком слагаемых, дети уже могут выразить сущность переместительного свойства в более *общей* форме: *при сложении можно переставлять числа одно на место другого*. А дальше — практическое приложение этого правила: легче прибавить меньшее число к большему, чем большее к меньшему.

Изучение новых случаев сложения и вычитания. Материал этой главы курса арифметики можно расположить в такой последовательности:

Сложение и вычитание без перехода через десяток:

1) 26 + 4, 35 + 5 и т. д.; 30 − 6, 50 − 4 и т. д.
2) 4 + 26, 3 + 47 ит. д.; 40 − 38, 60 − 54 и т. д.
3) 27 + 23, 42 + 18 и т. д.; 50 − 26, 80 − 32 и т. д.

Сложение и вычитание с переходом через десяток:

4) 28 + 7, 36 + 8 и т.д.; 32 − 5, 54 − 7 и т. д.
5) 7 + 28, 5 + 57 и т. д.; 41 − 37, 63 − 58 и т. д.
6) 29 + 25, 37 + 29 и т. д.; 52 − 28, 74 − 39 и т. д.

Разберем каждую из этих групп примеров с точки зрения тех вычислительных приемов, которые для нее характерны.

1) 26 + 4, 30 − 6. Складывая 26 и 4, учащиеся должны понимать, что к 6 единицам они прибавляют 4 единицы, не затрагивая полных десятков, а затем полученный десяток прибавляют к 20-ти. Такое сложение может быть названо *дополнением до круглых десятков*.

Учитель поясняет этот прием на классных счетах, а учащиеся выполняют его на спичках — отдельных и связанных в пучки-десятки. Соответствующий случай вычитания поясняется на тех же наглядных пособиях. Например, если надо от 30 отнять 6, дети берут 3 пучка-десятка, развязывают 1 десяток и от 10 спичек отнимают 6 спичек. Остается 2 десятка, да еще 4 спички, всего 24 спички.

Полезно проработать эти приемы и на группах специально подобранных примеров:

а)			б)		
	8 + 2	4 + 6		10 − 6	80 − 2
	28 + 2	24 + 6		20 − 6	80 − 5
	7 + 3	44 + 6		40 − 6	80 − 8
	47 + 3	64 + 6		70 − 6	80 − 9

2) 4 + 26; 40 − 38. При вычислении суммы 4 + 26 следует воспользоваться приемом перестановки слагаемых. Нахождение разности 40 − 38 можно рассматривать, как пример с вопросительным знаком: какое число надо прибавить к 38, чтобы получить 40? Но лучше отнести этого рода примеры на вычитание к следующей по порядку группе упражнений, когда придется отнимать двузначное от любого круглого числа.

3) 27 + 23; 50 − 26. Сложение чисел 27 и 23 можно выполнить двумя способами: 1) 20 + 20 = 40; 7 + 3 = 10; 40 + 10 = 50; 2) 27 + 20 = 47; 47 + 3 = 50. Последний способ труднее, но быстрее ведет к цели. Вычитать лучше всего

таким способом: 50 − 20 = 30; 30 − 6 = 24. Приемы эти учитель демонстрирует на классных счетах, а учащиеся воспроизводят на спичках или палочках. При этом они решают такие группы примеров:

а)	7 + 3	10 − 4	б)	30 + 30	60 − 20	в)	15 + 15	30 − 15
	37 + 33	40 − 4		32 + 18	60 − 26		25 + 25	50 − 25
	37 + 23	40 − 24		32 + 28	60 − 36		35 + 35	70 − 35
	57 + 23	60 − 24		42 + 38	60 − 46		45 + 45	90 − 45

4) 28 + 7; 32 − 5. Это первая группа примеров на сложение и вычитание с *переходом через десяток*. В этом случае можно опираться на предшествующий прием, т. е. пользоваться способом *дополнения* до круглых десятков. Для такого приема достаточно знания таблицы сложения и вычитания в *пределах первого десятка*. По этому способу 28 и 7 складываем так: 28 + 2 = 30; 30 + 5 = 35. Точно также, от 32 отнимаем 5 следующим способом: 32 − 2 = 30; 30 − 3 = 27.

Другой прием основан на знании таблицы в *пределах* 20. В этом случае складывать 28 и 7 будем таким способом: 8 + 7 = 15; 20 + 15 = 35; отнимать от 32 число 5 будем так: 12 − 5 = 7; 20 + 7 = 27.

Пояснить эти приемы сложения и вычитания необходимо и на классных счетах, и на других наглядных пособиях: спичках, полосках из квадратиков, которые учащиеся обводят у себя в тетрадях, и т. д.

Чертеж 70 и примеры под буквой а) наводят на первый из указанных приемов. Примеры под буквой б) подобраны применительно ко второму приему:

а)	28 + 2	32 − 2	б)	8 + 7	12 − 5
	28 + 3	32 − 3		18 + 7	22 − 5
	28 + 5	32 − 4		28 + 7	32 − 5
	28 + 7	32 − 5		48 + 7	52 − 5

Черт. 70.

Первый из указанных приемов менее громоздок и потому заслуживает предпочтения.

5) 7 + 28; 41 − 37. По поводу этой группы примеров надо сказать то же, что уже сказано относительно второй группы: сложение в данном случае выполняется на основе перестановки слагаемых, а вычитание лучше отнести к шестой и последней группе, когда приходится двузначное число вычитать из любого двузначного.

6) 29 + 25; 52 − 28. Это самая трудная группа примеров на сложение и вычитание.

Чтобы сложить числа 29 и 25, поступаем так: 20 + 20 = 40; 9 + 5 = 14; 40 + 14 = 54, или короче: 29 + 20 = 49, 49 + 5 = 54, или, наконец, так:

29 + 21 = 50; 50 + 4 = 54. Чаще всего следует пользоваться первым и вторым из указанных способов.

При вычитании лучше не пользоваться таким способом разбивки уменьшаемого, который типичен для письменных приемов вычитания многозначных чисел. Так, если надо отнять от 52 число 28, можно поступить таким образом: 40 − 20 = 20; 12 − 8 = 4; 20 + 4 = 24. Но лучше пользоваться сначала таким приемом: 52 − 20 = 32; 32 − 2 = 30; 30 – 6 = 24, а затем вычислять разность 52 − 28 короче: 52 − 20 = 32; 32 − 8 = 24 или: 52 − 22 = 30; 30 − 6 = 24.

Последний способ, который иногда называют *способом уравнения единиц*, мы особенно рекомендуем вниманию преподавателя.

При сложении и вычитании с переходом через десяток можно показать детям прием округления одного из слагаемых, а также округление вычитаемого. Этот прием можно объяснить детям следующим образом. Пусть надо сложить 25 и 19. Прибавим сразу 20, получится 45. Сколько лишних единиц мы прибавили? Прибавили одну лишнюю единицу. Отнимем ее. Получится 44.

Прием округления вычитаемого учитель объясняет аналогичным способом. Пусть надо от 63 отнять 29. Отнимем сразу 30, получится 33. Сколько лишних единиц мы отняли? Отняли одну лишнюю единицу. Вернем ее обратно. Получится 34.

Термины больше, меньше, увеличить, уменьшить на столько-то.

Общие замечания. На первом году обучения дети встречались уже с выражениями *больше или меньше на столько-то*. О приемах проработки этих понятий говорилось выше (стр. 144). Термины *больше* или *меньше* дети применяли до сих пор только к конкретным числам и при том только в *утвердительной* форме. Приведем пример. В одном мешке 15 *кг* крупы, в другом на 3 *кг* больше. Сколько крупы во втором мешке? Приведем другой пример. На одной полке 40 книг, на другой на 10 книг меньше. Сколько книг на второй полке? Те же вопросы не ставились по отношению к отвлеченным числам: какое число на 5 больше чем 7? Или: какое число на 3 меньше, чем 20?

Выражения *увеличить и уменьшить на столько-то* тоже еще не были сообщены детям. Наконец, совершенно не затрагивались задачи с конкретными и отвлеченными числами, в которых надо узнать, на сколько одно из данных чисел больше или меньше другого.

Чтобы понять арифметическую основу этих вопросов и привести их в систему, рассмотрим следующее равенство: 15 − 9 = 6. На первом году дети этот пример читали так: от 15 отнять 9, получится 6. Число 6 они понимали только

как *остаток*. Но тот же пример можно прочитать иначе: *15 больше 9 на 6* или *9 меньше 15 на 6*. В этом случае мы понимаем число 6 как *разность*. Итак, разность двух чисел показывает, на сколько одно из них больше другого или на сколько одно из них меньше другого.

Исходя из приведенного равенства 15 – 9 = 6, можно построить следующие задачи:

1. По вычитаемому и разности найти уменьшаемое. Например:

Средняя корова дает 9 литров молока в день, хорошая корова — на 6 литров *больше*. Сколько молока дает хорошая корова? Ту же задачу можно построить несколько иначе. Средняя корова дает 9 литров молока в день, на 6 литров *меньше*, чем хорошая. Сколько молока дает хорошая корова?

Обе эти задачи, решаются *сложением*. С первым вариантом дети встречались уже на первом году обучения. Второй вариант труднее, так как здесь сложение задано в терминах вычитания. Таких задач дети еще не решали.

2. По уменьшаемому и разности найти вычитаемое. Например:

Хорошая корова дает 15 литров молока, средняя на 6 *литров меньше*. Сколько молока дает средняя корова? Ту же задачу можно построить несколько иначе. Хорошая корова дает 15 литров молока, на 6 *литров больше*, чем средняя. Сколько молока дает средняя корова?

Обе эти задачи решаются *вычитанием*. С первым вариантом дети уже встречались на первом году обучения. Второй вариант труднее, так как здесь вычитание задано в терминах сложения. Таких задач дети еще не решали.

3. Найти разность двух чисел. Например:

Хорошая корова дает 15 литров молока в день, средняя корова — 9 литров. *На сколько больше* молока дает хорошая корова, чем средняя? к той же задаче можно иначе поставить вопрос: *на сколько меньше* молока дает средняя корова, чем хорошая?

Оба вопроса решаются *вычитанием*. Таких задач учащиеся до сих пор еще не встречали. Это задачи на, так называемое, *разностное сравнение.*

Таким образом, мы видим, что в основе всех трех приведенных видов задач лежит понятие о *разности*. В двух первых группах задач *разность дана*. Вот почему в этих задачах выражения *больше и меньше на столько-то* выступают, как *утверждение*. В третьей категории задач разность является *искомой*. Вот почему в этом случае выражения *больше и меньше на столько-то* появляются в виде *вопроса*.

На втором году обучения дети должны научиться решать трудные варианты первого и второго вида этих задач и задачи третьего вида. (О решении задач см. стр. 231).

Увеличить и уменьшить на столько-то. Эти выражения характеризуют изменение величины. При изменении же величины изменяется и число, измеряющее эту величину. Увеличилось на столько-то — значит изменилось, стало на столько-то больше, чем было.

Вот как можно разъяснить детям смысл этих выражений применительно к конкретным числам.

Учитель откладывает на счетах 4 шарика. Затем прибавляет к ним еще 2 шарика. Было 4 шарика, стало на 2 шарика больше. Сколько теперь шариков на счетах?

Ученики отвечают: 6 шариков, так как к 4 прибавить 2, будет 6.

Учитель продолжает: было 4 шарика, стало на 2 больше. Иначе можно сказать: *число шариков увеличилось на 2*. По наводящим вопросам дети повторяют слова учителя:

Вопросы:	*Ответы:*
а) Сколько шариков было?	Было 4 шарика.
б) На сколько больше шариков стало?	На 2 шарика больше.
в) На сколько увеличилось число шариков?	Число шариков увеличилось на 2.

Когда смысл выражения *увеличить на столько-то* на ряде аналогичных упражнений усвоен, вопрос ставится прямо: обведите в тетради полоску в 5 клеток. Увеличьте число клеток на 2. Сколько будет клеток? Учащиеся обводят 5 клеток, затем еще 2 клетки и объясняют: было 5 клеток. Число клеток увеличилось на 2. Увеличилось на 2 — значит, стало на 2 клетки больше. 5 клеток и еще 2 клетки — всего стало 7 клеток.

Когда на достаточном числе упражнений дети научатся употреблять выражение *увеличить на столько-то* и решать задачи, в которых встречается это выражение, надо по тому же плану проработать выражение *уменьшить на столько-то*.

Разностные сравнения. Решение задач, в которых разность *дана*, должно было подготовить учащихся к решению задач, в которых она является *искомой*. Но прежде чем решать *задачи* на разностное сравнение, необходимо проработать этот вопрос на наглядных пособиях. Проработка эта должна быть поставлена таким образом, чтобы арифметическое действие, которым решается данный вопрос, непосредственно вытекало из тех физических действий, которые дети производят над предметами. Дело в том, что в данном случае основная трудность и заключается как раз в выявлении действия, которым решается вопрос. Проработка протекает по следующему плану.

Учитель предлагает учащимся положить налево 7 зеленых спичек, направо 12 красных. Затем ставится вопрос: *на сколько* красных спичек *больше*, чем зеленых?

Чтобы ответить на этот вопрос, учитель предлагает детям снимать одновременно по одной зеленой и по одной красной спичке, пока на столе не останется ни одной зеленой спички.

Дети снимают сразу по одной зеленой и по одной красной спичке. Попутно они считают: один, два, три, четыре, пять, шесть, семь.

После этого учитель ставит вопросы, а дети отвечают:

Вопросы:	*Ответы:*
1. Сколько вы сняли зеленых спичек?	Мы сняли 7 зеленых спичек.
2. А сколько красных?	Тоже 7.
3. Почему несколько красных спичек еще осталось?	Потому что красных спичек было больше, чем зеленых.
4. На сколько больше?	На 5 спичек больше, чем зеленых.
5. Как вы это узнали?	От 12 спичек мы отняли 7 спичек, осталось 5 спичек.
6. Как это записать?	12 − 7 = 5.
7. Итак, что же мы узнали?	Мы узнали, что красных спичек на 5 больше, чем зеленых.

По такому же плану прорабатывается и другой вопрос: на сколько одно число *меньше* другого.

Эти упражнения надо повторить несколько раз, меняя предметы. В конце концов дети должны понять, что, узнавая, на сколько одно число предметов *больше* другого, они отделяют, *отнимают* от большего числа столько предметов, сколько их в меньшем. Точно также, узнавая, на сколько одно число предметов *меньше* другого, они тоже отделяют, *отнимают* от большего числа столько предметов, сколько их в меньшем. Другими словами, оба вопроса решаются вычитанием.

„Больше и меньше, увеличить и уменьшить на столько-то“ при отвлеченных числах. Когда дети научатся сравнивать численность групп конкретных предметов, можно ставить перед ними вопросы разностного сравнения и в отвлеченной форме.

Сначала предлагаются более легкие упражнения, в которых *разность дана*. Например:

1. К 7 прибавьте 3. Сколько получится? Что *больше:* 10 или 7? На сколько 10 больше 7? На сколько *увеличилось* число 7?

2. Назовите число, которое больше 8 на 3. Назовите число, которое больше 19 на 7.

3. Увеличьте 9 на 4. Увеличьте 8 на 6.

4. От 11 отнимите 2. Сколько получится? Что *меньше:* 9 или 11? На сколько 9 меньше 11? На сколько *уменьшилось* число 11?

5. Назовите число, которое меньше 25 на 7. Назовите число, которое меньше 42 на 15.

6. Уменьшите 14 на 5. Уменьшите 23 на 8.

Затем предлагаются более трудные вопросы, в которых разность является *искомой*. Например:

1. На сколько 20 больше 17? Что надо сделать, чтобы ответить на этот вопрос?
2. На сколько 29 меньше 34? Что надо сделать, чтобы ответить на этот вопрос?
3. Что и на сколько больше: 23 или 37? Как решить этот вопрос?
4. Что и на сколько меньше: 56 или 65? Как решить этот вопрос?

Проработкой на отвлеченных числах вопросов разностного сравнения заканчивается знакомство учащихся с различными случаями применения действия вычитания. В это время можно познакомить детей с терминами *вычитание, вычесть*. Учитель объясняет детям, что запись 15 — 6, которую до сих пор они читали: от 15 отнять 6, можно прочитать иначе: из 15 вычесть 6. *Вычитая* 6 из 15, мы делаем *вычитание*. Эти термины труднее, чем термины сложение, сложить, которые поэтому сообщаются детям раньше (стр. 175). Но все же и эти слова дети слышат иногда в разговорной речи. Надо только следить, чтобы они не путали предлогов из и от, когда наряду со словом *отнять* в их языке появится слово *вычесть*.

Сложение и вычитание именованных чисел.

Именованные числа получаются при измерении длины, веса, времени и других величин. *Простое именованное число* получается при измерении величины одной мерой и потому заключает название одной меры. С простыми именованными числами дети встречались уже на первом году обучения. В результате измерений метром, килограммом, литром и т. д. они получали такие числа, как 5 *м*, 7 *кг*, 8 *л* и т. п. Действия над этими числами ничем не отличались от действий над числами, которые получаются при счете однородных предметов, или же над числами отвлеченными.

Составное именованное число получается при измерении величины несколькими мерами и поэтому заключает названия нескольких мер. Таковы числа: 2 *м* 75 *см*; 4 *кг* 250 *г*; 3 часа 18 мин. При изучении арифметики рассматривают только двухсоставные именованные числа, так как именованные числа, которые заключают названия трех и более мер, не имеют ни практического, ни теоретического применения.

В первую четверть прорабатываются только те случаи сложения и вычитания именованных чисел, которые не требуют превращения и раздробления мер. Помимо большей сложности вычислений, которая могла бы сама по себе

затруднять детей, случаи сложения и вычитания с превращением и раздроблением мер могли бы вывести нас за пределы сотни, которая изучается в это время. Так, если при сложении рублей и копеек нам пришлось бы превращать копейки в рубли, это означало бы, что полученная сумма копеек превышает 100. Точно также, отнимая 70 *см* от 2 *м* 25 *см*, мы должны были бы, собственно, отнимать 70 от 125, что тоже выходит за пределы изучаемого концентра. Таким образом, необходимо ограничиться только указанными выше наиболее легкими случаями сложения и вычитания именованных чисел.

Ко времени изучения именованных чисел на втором году обучения детям уже известны следующие меры: рубли и копейки, метры, дециметры и сантиметры, сутки и часы. Поэтому можно наметить 5 групп упражнений, в зависимости от того, какие названия мер входят в состав именованных чисел: 1) рубли и копейки; 2) метры и дециметры; 3) дециметры и сантиметры; 4) метры и сантиметры; 5) сутки и часы.

Поскольку дети знают только одну меру веса — килограмм и только одну меру вместимости — литр, составных именованных чисел при измерении веса и вместимости в это время еще не может получиться.

Именованные числа, в состав которых входят рубли и копейки, всего ближе и понятнее детям — с них и можно начать проработку раздела. Упражнения следует расположить в таком порядке: 1) сложение рублей и копеек с копейками; 2) вычитание копеек из рублей и копеек; 3) сложение рублей и копеек с рублями и копейками и 4) вычитание рублей и копеек из рублей и копеек. Сначала дети решают задачи с такими числами, а затем и примеры. При решении числа записывают в строчку, так как здесь еще было бы рано пользоваться письменными приемами вычисления. Например:

4 р. 38 к. + 1 р. 54 к. = 5 р. 92 к.
7 р. 86 к. − 3 р. 58 к. = 4 р. 28 к.

Дети складывают сначала рубли с рублями, а затем копейки с копейками. При вычитании они сначала отнимают рубли от рублей, а затем копейки от копеек.

Задачи и примеры на меры длины можно давать детям только после того, как они научатся получать при измерении составные именованные числа. Ученик должен вполне конкретно представлять себе состав именованного числа и величину, которую это число измеряет. Так, 5 *м* 3 *дм* ученик должен представлять себе в виде прямой линии, например, длины комнаты, вдоль которой метр отмерили 5 раз, и еще оказался остаток, на котором дециметр поместился 3 раза. Так же конкретно дети должны представлять себе, например, 2 *дм* 4 *см* или 3 *м* 65 *см*. Необходимо произвести довольно много

измерений, чтобы каждое составное именованное число вызывало у учащихся определенный, отчетливый *образ*.

При решении задач и примеров на меры длины следует соблюдать ту же последовательность и те же приемы, которые были указаны для чисел, состоящих из рублей и копеек.

Упражнения на меры времени сводятся к повторению того, что уже пройдено на первом году обучения и к сложению и вычитанию именованных чисел, составленных из суток и часов. Последовательность и приемы те же, что и в предшествующих случаях.

Умножение и деление по содержанию.

Общие замечания и план работы. Выше были методически обоснованы последовательность и приемы изучения таблицы умножения и деления в пределах 20 (стр. 104). Те же указания в основном относятся и ко второму году обучения, так как мышление детей продолжает оставаться *образным*, а с точки зрения содержания работа над умножением и делением во втором году является *продолжением* работы первого года.

Как и в первом году, проработывая табличное умножение, мы располагаем его элементы по постоянному множимому. Так, мы изучаем умножение пяти на все числа первого десятка, умножение шести на те же числа и т. д. Совместно с умножением изучаем *соответствующие* случаи деления, расположенные по *постоянному делителю*. Этим определяется *вид* деления, с которого начинается проработка этого действия. В самом деле, если, например, число 6 умножить на все числа первого десятка, то *соответствующими* будут следующие случаи деления:

6 × 2	12 : по 6	12 : на 2
6 × 3	18 : по 6	18 : на 3
6 × 4	24 : по 6	24 : на 4
6 × 5	30 : по 6	30 : на 5
6 × 6	36 : по 6	36 : на 6
6 × 7 и т. д.	42 : по 6 и т. д.	42 : на 7 и т. д.

Если мы хотим попутно с умножением изучать соответствующие и притом *однородные по трудности* случаи деления, мы должны одновременно с умножением шести изучать деление по 6, т. е. деление по *содержанию*.

Умножение двух и десяти пройдено на первом году обучения полностью. Таблицы умножения остальных чисел первого десятка только начаты, поскольку они изучались лишь в пределах 20. На втором году надо начать с повторения умножения двух, а затем перейти к умножению пяти, связывая счет пятками с известным уже детям счетом десятками. После этого можно в порядке числового ряда пройти умножение чисел 3 и 4. Далее, опираясь на счет

тройками, удобно проработать умножение шести, а на счет четверками — умножение восьми. Заканчивается изучение таблицы умножением чисел 9 и 7. Совместно с умножением прорабатываются соответствующие случаи деления.

На втором году обучения наряду с образным выражением *взять по столько-то* можно допустить выражения *умножить на столько-то*, *перемножить* такие-то числа. Эти выражения позволят короче читать таблицу умножения и облегчат усвоение ее наизусть. *Перемножить* 5 и 7 это значит 5 *умножить на* 7 или 7 *умножить на* 5. *Умножая*, мы делаем *умножение*. Этот термин, точно так же, как и термин *деление* уже можно постепенно вводить в язык учащегося. Однако, до тех пор, пока мы изучаем каждый вид деления *отдельно* и ведем это изучение на наглядных пособиях, было бы преждевременно образное выражение *разделить по столько-то* заменять отвлеченной фразой *разделить на столько-то*.

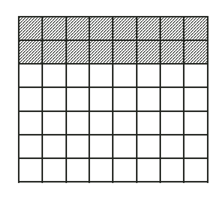
Работа над табличным умножением и делением должна быть признана важнейшей и ответственнейшей работой в начальном курсе арифметики. В это время формируются у детей основные понятия об умножении и делении (стр. 21 и 23), которые будут иметь важное значение на последующих ступенях курса начальной арифметики. На эти понятия надо обратить внимание именно здесь, так как числа в таблице умножения и деления еще невелики, и потому основные понятия этих действий доступны наглядному истолкованию. Конкретное выражение эти понятия получают в *приемах умножения и деления*. Поэтому необходимо развивать у детей уменье пользоваться при умножении и делении разнообразными вычислительными приемами и выбирать из них те, которые для данного случая являются наиболее подходящими. Учитель должен обращать внимание не только на то, *сколько* ученик получил, и верен ли полученный им результат, но и на то, *как* он получил свой ответ, какие еще могут быть способы вычисления того же результата, какие из них лучше.

В процессе вычислений дети постепенно запоминают наизусть все табличные произведения. Это достигается не путем механической зубрежки, а путем многократного применения многообразных вычислительных приемов.

Проработка основных приемов табличного умножения.

Выше были указаны те вычислительные приемы, которыми дети пользуются при разработке табличного умножения. Чтобы сделать их для детей вполне понятными, осязательными, необходимо проработать их внимательно и неторопливо, конкретизируя каждый такой прием при помощи наглядных пособий.

Прекрасным образом, поясняющим умножение и его основные свойства, а вместе с тем и вычислительные приемы этого действия, является образ прямоугольника, составленного из квадратиков, расположенных рядами.



Черт. 71.

Так, глядя на прямоугольник, изображенный на чертеже 71, учащиеся могут набирать восьмерки по одной или группами.

Они могут считать так:

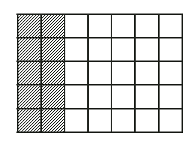
$$8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 56$$

$$8 \times 7 = 56$$

Но можно также вычислить отдельно число квадратиков в 5 рядах и в 2 рядах и полученные числа сложить (черт. 71):

$$8 \times 5 = 40 \qquad 8 \times 2 = 16 \qquad 40 + 16 = 56$$

В этом случае множитель 7 мы разложили на части 5 и 2. Иногда бывает удобнее разложить на части не множитель, а множимое. Например, при умножении 7 на 5, можно сначала умножить 5 на 5, затем 2 на 5 и полученные числа сложить. И этот прием легко пояснить при помощи чертежа 72:



Черт. 72.

$$5 \times 5 = 25 \qquad 2 \times 5 = 10$$

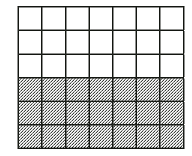
$$25 + 10 = 35$$

Когда множитель четное число, удобно собирать слагаемые в равные группы. Пусть, например, надо умножить 7 на 6. Это умножение можно выполнить двумя способами:

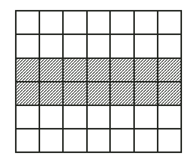
1) $7 \times 3 = 21$; $21 + 21 = 42$

2) $7 \times 2 = 14$; $14 + 14 + 14 = 42$

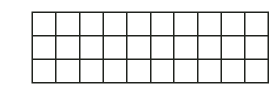
Первый из этих способов иллюстрирует чертеж 73, второй способ — чертеж 74.



Черт. 73.



Черт. 74.



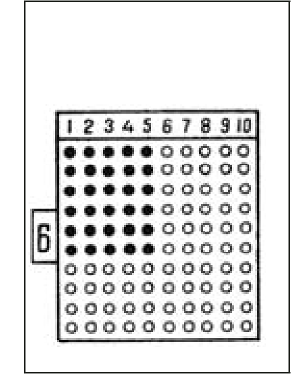
Черт. 75.

Наконец, в некоторых случаях бывает очень удобно воспользоваться приемом перестановки сомножителей. Например, чтобы умножить 3 на 10, достаточно сообразить, что 10 × 3 = 30. И этот факт дети непосредственно усматривают из чертежа 75.

При всех удобствах, которые представляет собою прямоугольник, составленный из квадратиков, у этого пособия есть и свои недостатки. В гото-

вом виде такой прямоугольник недостаточно активизирует преподавание, являясь по преимуществу *наглядным* пособием в буквальном смысле этого слова. Вследствие большого числа квадратиков, тесно примыкающих друг к другу, у детей, что называется, глаза раз бегаются. Ряды сливаются, и учащиеся просто не видят того, что хочет показать им учитель — не видят группировки слагаемых. Помочь делу можно раскрашиванием некоторых частей прямоугольника. Но раскрашивание, помогая понять расположение элементов образа, еще не делает самый образ *подвижным*. Между тем такая подвижность была бы в данном случае ценнее всего.

Интересным наглядным пособием, поясняющим табличное умножение, является таблица умножения Монтессори. Ее можно приготовить из двух квадратных кусков картона. На одном куске пробивают 100 отверстий, расположенных рядами, по 10 отверстий в каждом ряду. Квадраты склеиваются; таким образом нижний из них служит *дном* для отверстий верхнего. В отверстия ребенок вкладывает бусинки или деревянные шарики, набирая столбец за столбцом. Налево помещается цифра, которая обозначает *множимое*. На нашем рисунке изображается умножение шести.



6× 1 = 6
6× 2 = 12
6× 3 =
6× 4 =
6× 5 =
6× 6 =
6× 7 =
6× 8 =
6× 9 =
6×10 =

Черт. 76.

Для записи результатов умножения Монтессори дает детям готовые листки. Набрав первый, столбец из 6 шариков, ребенок записывает число 6 на таком листке против первого произведения 6 × 1. Набрав второй столбец, он пишет число 12 против второго произведения 6 × 2 и т. д., пока не заполнит 60 отверстий шариками или бусами и не дойдет до последнего произведения 6 × 10.

В основе этих упражнений, как мы видим, лежит характерное для всей „системы“ Монтессори голое пересчитывание. Ребенок, предоставленный самому себе, даже не сразу догадывается, что при вычислении каждого нового произведения можно *продолжать* счет, а не начинать его сначала. Но при правильном руководстве со стороны учителя можно использовать это пособие и более целесообразно. Набирая каждое из равных слагаемых по одному, дети складывают затем эти слагаемые, т. е. пользуются элементарным приемом умножения.

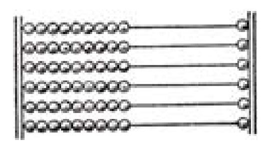
При всей подвижности, таблица Монтессори не дает той *подвижности образа в целом*, которая могла бы пояснить наряду с элементарным приемом

набирания равных слагаемых и более совершенные приемы, связанные с разложением множителя или множимого на части. Этого рода подвижность могут дать классные счеты.

Пусть, например, дети учатся умножать 9 на 6. На 6 проволоках учитель неторопливо откладывает по 9 шариков, давая возможность учащимся, по мере набирания равных слагаемых на счетах, производить сложение этих чисел (черт. 77). Складывая, дети говорят: 9 да 9 = 18; 18 да 9 = 27; 27 да 9 = 36 и т. д. Затем они записывают в тетрадях:

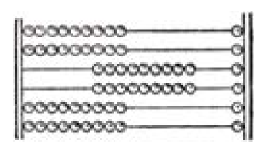
$$9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 54.$$

и короче: $9 \times 6 = 54$





Черт. 77.



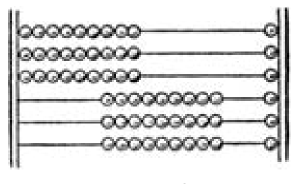
Черт. 78.

После этого п е р в о г о , элементарного приема умножения, можно перейти ко в т о р о м у приему, связанному с разложением на части м н о ж и т е л я .

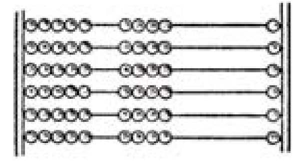
Сдвинув немного вправо два средних ряда шариков, учитель создает на глазах у учащихся такую группировку слагаемых, которая позволяет быстрее вычислить результат (черт. 78):

$$9 \times 2 = 18; \qquad 18 + 18 + 18 = 54.$$

Можно сгруппировать слагаемые иначе, сдвинув вправо три нижних ряда шариков (черт. 79).



Черт. 79.



Черт. 80.

Вычисления запишем так:

$$9 \times 3 = 27; \qquad 27 + 27 = 54.$$

Т р е т и й прием заключается в разложении на части *множимого*. И этот прием удобно пояснить на счетах. Так, например, Множимое можно разложить на группы в 5 кружков и 4 кружка (черт. 80). Тогда будем вычислять произведение следующим образом:

$$5 \times 6 = 30; \quad 4 \times 6 = 24; \quad 30 + 24 = 54.$$

Ч е т в е р т ы й прием, прием перестановки сомножителей тоже можно продемонстрировать на счетах. Для этого достаточно теснее сдвинуть шарики, чтобы удобно было считать их по столбцам и по рядам.

Можно, наконец, указать еще один *частный* прием — прием округления множимого, который удобен в данном случае, так как число 9 близко к 10. Отложим на счетах 6 десятков шариков. Сбросим с каждой проволоки по одному шарику. На каждой проволоке останется по 9 шариков. Значит, чтобы 9 умножить на 6, надо по 10 взять 6 раз и отнять 6 шариков. Получится 54 шарика.

Проработка основных приемов деления по содержанию. Когда деление проходится совместно с умножением, а так именно и следует проходить это действие, то результат деления берется прямо из таблицы умножения. Так, 36 разделить по 4 будет 9, так как 36 будет, если 4 взять 9 раз. Но брать готовый результат мы можем только в том случае, когда таблица уже усвоена наизусть. Первоначально же частное приходится находить путем проб. Однако и в этом случае деление выполняется на основе умножения. Пусть надо 36 разделить по 4. Предположим, что получится в ответе 4 раза по 4. Проверим, так ли это: по 4 взять 5 раз = 20; значит, 5 мало. Попробуем взять 6 раз по 4; тоже мало. Возьмем 7 раз по 4, 8 раз по 4, наконец, 9 раз по 4. Находим, что по 4 взять 9 раз = 36. Значит, 36 разделить по 4 будет 9. Пояснить этот прием нахождения частного путем проб можно на тех же наглядных пособиях — расположенных рядами квадратиках, кружках, шариках, при помощи которых мы иллюстрировали умножение.

Иногда бывает удобно разложить делимое на слагаемые и делить каждое слагаемое отдельно. Например, чтобы разделить 36 по 4, можно поступить так: разделить 20 по 4, получится 5; разделить 16 по 4, получится 4, а всего 5 да 4 = 9.

По мере того, как учащиеся запоминают таблицу умножения наизусть, такого рода приемы отходят на последний план, и в конце концов остается прием, основанный на взаимосвязи между умножением и делением, как действием, обратным умножению. Для того, чтобы подчеркнуть эту связь, полезно при изучении деления решать примеры с x. Вот разъяснения и наводящие вопросы к примеру $6 \times x = 54$:

По 6 взяли несколько раз и получили 54. Сколько раз взяли по 6? Значит, сколько же раз 6 содержится в 54? Как записать решение этого вопроса?

Дети должны знать, что вопрос, сколько раз 6 содержится в 54, решается делением и записывается это решение таким образом: 54 : 6 = 9.

Умножение 5-ти и деление по 5. Изучение новых табличных случаев мы начинаем с умножения и деления по 5. Специфическую особенность этой группы табличных упражнений составляет ее связь с умножением и делением по 10. Надо вести работу таким образом, чтобы учащиеся уловили эту связь и научились ею пользоваться.

Каждая новая группа табличных упражнений начинается с подготовительного „счета равными группами“. Работа состоит из следующих двух этапов:

а) Присчитывание по 5 в пределах 50. Глядя на классные счеты, на которых учитель откладывает пятки, или на рисунок в учебнике, изображающий ряды яблок, дети называют числа: 5, 10, 15 и т. д. до 50. Несколько учеников по очереди называют эти числа вслух, а все остальные считают про себя. Называя числа, дети записывают их в тетрадях.

б) Отсчитывание по 5 в пределах 50. Это упражнение ведется по тому же плану, что и присчитывание. Называя числа 50, 45, 40 и т. д., дети записывают их в указанном порядке в своих тетрадях.

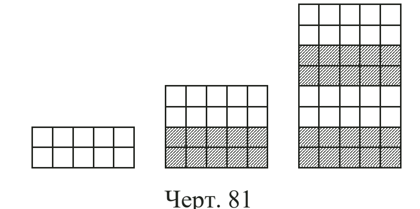
Чтобы удобнее было вести дальнейшую работу, в частности, чтобы удобнее было пояснить вычислительные приемы, выгоднее всего располагать упражнения по следующей схеме:

1) <u>5 × 2</u>, <u>5 × 4</u>, 5 × 8,	4) <u>10 : по 5</u>, <u>20 : по 5</u>, 40 : по 5,
2) <u>5 × 3</u>, 5 × 6, 5 × 9,	5) <u>15 : по 5</u>, 30 : по 5, 45 : по 5,
3) 5 × 5; 5 × 10; 5 × 7;	6) 25 : по 5; 50 : по 5; 35 : по 5.

Подчеркнуты те случаи, которые уже изучены на первом году обучения и вводятся здесь, во-первых, в целях повторения и, во-вторых, как опора для дальнейших вычислений.

Поясним более подробно изучение каждой из этих четырех групп.

1. Начнем с *лабораторной проработки* умножения числа 5 на 2, на 4 и на 8. Положим, что на этот раз мы решили воспользоваться прямоугольниками из квадратиков. Направляя работу детей, учитель рисует на доске то, что дети рисуют в тетрадях.



Черт. 81

Обведите в тетрадях 2 ряда клеток по 5 клеток в каждом ряду. Обведите рядом прямоугольники, состоящие из 4-х и из 8-ми таких же рядов.

Сосчитайте и запищите, сколько клеток в 2 рядах, в 4 рядах.

Эти вопросы не новы для детей. Они уже умеют умножать 5 на 2 и на 4.

Сосчитайте и запишите, сколько всего клеток в 8 рядах.

Сначала дети набирают слагаемые по одному:

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 40.$$

Затем записывают короче: $5 \times 8 = 40$.

После этого учитель помогает им наводящими вопросами найти более удобные вычислительные приемы.

Сколько клеток в двух рядах? Затушуйте (или раскрасьте) во втором прямоугольнике 2 нижних ряда. Как теперь сосчитать клетки в этом прямоугольнике?

Ответ: $10 + 10 = 20$.

Затушуйте и в третьем прямоугольнике ряды через два. Как теперь сосчитать клетки в этом прямоугольнике?

Ответ: $5 \times 2 = 10$; $10 + 10 + 10 + 10 = 40$.

Сколько клеток в четырех рядах? 8 рядов — это 4 ряда да еще 4 ряда. Как сосчитать клетки в 8-ми рядах?

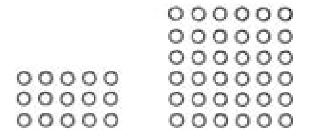
Ответ: $5 \times 4 = 20$; $20 + 20 = 40$.

После этого дети решают задачу:

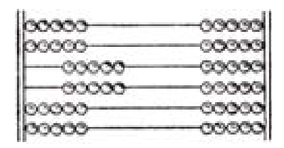
Яблоки разложили рядами, по 5 яблок в каждом ряду. Сколько яблок в 2-х рядах? в 4-х рядах? в 8-ми рядах?

Учитель напоминает детям вычислительный прием:

По 5 взять 4 раза — сколько будет? По 5 взять 8 раз — сколько будет? Если забыли, считайте так: (громко) по 5 взять 4 раза, (тихо) 20 да 20, (громко) 40.



Черт. 82.



Черт. 83.

2. Вторая группа упражнений прорабатывается по тому же плану, что и первая. Чтобы внести разнообразие в работу, можно на этот раз воспользоваться вместо прямоугольников классными счетами. Дети в этом случае рисуют в тетрадях не квадратики, а кружки.

Учитель откладывает на трех проволоках по 5 шариков. Дети рисуют 3 ряда, по 5 кружков в каждом ряду (черт. 82), умножают 5 на 3 и записывают: $5 \times 3 = 15$.

К трем рядам шариков учитель присоединяет еще 3 ряда. Дети набирают слагаемые длинным способом:

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30,$$

а затем записывают короче:

$$5 \times 6 = 30.$$

Сколько кружков в трех рядах? 6 рядов — это 3 ряда да еще 3 ряда. Как сосчитать кружки в 6-ти рядах?

Ответ: $5 \times 3 = 15$; $15 + 15 = 30$.

Учитель сдвигает немного вправо 2 средних ряда шариков на счетах (черт. 83).

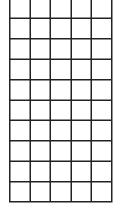
Сколько шариков в двух рядах? Как теперь сосчитать шарики на 6 проволоках?

Ответ: $5 \times 2 = 10$; $10 + 10 + 10 = 30$.

Чтобы сосчитать число шариков на 9 проволоках, по 5 шариков на каждой проволоке, опять удобнее обратиться к произведению 5×3. Так как 9 рядов — это 3 ряда, еще раз 3 ряда и еще раз 3 ряда, то найти произведение 5×9 (после длинной записи сложением) можно быстрее:

$$5 \times 3 = 15;\ 15 + 15 + 15 = 45.$$

После этого дети решают простые задачи на умножение и повторяют приемы умножения на отвлеченных числах: (громко) по 5 взять 6 раз, (тихо) 15 да 15, (громко) 30. Или: (громко) по 5 взять 6 раз, (тихо) 10 да 10 да еще 10, (громко) 30. Точно так же повторяют умножение 5 на 9.



Черт. 84.

3. При умножении на 5 и на 10 можно снова воспользоваться образом прямоугольника, составленного из квадратиков. Сначала дети рисуют прямоугольник из 5 рядов клеток, по 5 клеток в каждом ряду, и изучают случай 5×5. Затем они рисуют 10 рядов клеток, по 5 клеток в каждом ряду.

Сосчитаем, сколько клеток в 10 рядах, если в каждом ряду по 5 клеток.
Ответ: $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 50$.
Или короче: $5 \times 10 = 50$.

Сколько клеток в 5 рядах? 10 рядов — это 5 рядов да еще 5 рядов. Чтобы это было видно яснее, разделим прямоугольник на части так, чтобы в каждой части было по 5 рядов.

Как удобнее теперь умножать 5 на 10?
Ответ: $5 \times 5 = 25$; $25 + 25 = 50$.

Теперь сосчитаем, сколько клеток в 5 столбцах, если в каждом столбце по 10 клеток?

Ответ: $10 \times 5 = 50$.

Итак, будем ли мы считать клетки, как в первом случае, по *рядам* или, как во втором случае, — по *столбцам*, мы получим одно и то же число 50. Значит, 5 умножить на 10 все равно, что 10 умножить на 5.

Умножать 10 на 5 дети научились еще на первом году обучения и это легче, чем умножать 5 на 10. Поэтому при вычислении произведения 5×10 мы будем пользоваться приемом перестановки сомножителей.

В остальном работа протекает по тому же плану, что и в предшествующих случаях.

Изучение умножения заканчивается умножением 5 на 7. В этом случае можно набрать сначала 6 пятерок, что дети уже умеют делать, и к полученному числу добавить еще одну пятерку. А можно разложить множитель на 5 и на 2, умножить сначала 5 на 5, затем 5 на 2 и полученные числа 25 и 10 сложить.

Вслед за умножением прорабатывается деление.

Вы обвели 2 ряда по 5 клеток. Найдите их. Глядя на них, скажите: 10 клеток разделить по 5 клеток, сколько раз получается по 5?

Так же ставится вопрос относительно деления по 5 числа 20 и числа 40.

Затем дети решают задачи:

40 камешков разложили рядами, по 5 камешков в каждом ряду. Сколько выйдет рядов?

Запись решения: 40 к., по 5 к. = 8. *Ответ*: 8 рядов.

Конверт стоит 5 коп. Сколько конвертов можно купить на 20 коп.? на 40 коп?

Запись решения: 20 коп. : по 5 коп. = 4. *Ответ*: 4 конверта.
40 коп. : по 5 коп. = 8. *Ответ*: 8 конвертов.

Чтобы разделить 40 по 5, можно рассуждать таким образом: 40 состоит из четырех десятков; в каждом десятке по два пятка. Значит, пять в сорока содержится 8 раз.

После этого изучаем деление по 5 чисел 15, 30 и 45.

15 шариков разделить по 5 шариков, сколько раз получится по 5 шариков? спрашивает учитель, показывая 15 шариков, которые он перед тем отложил на счетах.

Чтобы разделить 30 по 5, можно рассуждать так: 30 состоит из трех десятков; в каждом десятке по два пятка. Значит, 5 в 30 содержится 6 раз.

45 по 5 можно делить путем проб. Попробуем взять 5 раз по 5; получится 25. Значит, мало. Возьмем 6 раз — мало; 7 раз — мало; 8 раз — мало. По 5 взять 9 раз — 45. Значит, 45 разделить по 5 будет 9.

Можно рассуждать иначе: 30 делить по 5 мы уже умеем; получится 6. Итак, 30 разделить по 5 будет 6; 15 разделить по 5 будет 3; а всего 6 да 3 = 9.

Можно, наконец, вспомнить, что 40 состоит из 8 пятков. Следовательно, в числе 45 содержится 9 пятков, т. е. 45 разделить по 5 будет 9.

Деление 35 по 5 можно делать путем проб, а также и на основе распределительного закона, например, так: 20: по 5 = 4; 15: по 5 = 3; 4 + 3 = 7. Проработка умножения и деления происходит сначала на дидактическом материале, затем на простых задачах и, наконец, на отвлеченных числах.

Заканчивается изучение каждой группы табличных упражнений записью таблицы умножения и деления в тетрадях. При этом произведения 5 × 2 = 10, 5 × 3 = 15, 5 × 4 = 20 и т. д. дети могут читать так: 2 пятерки или *дважды* пять

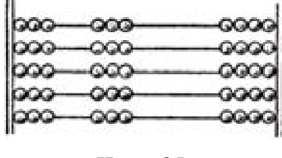
будет 10; 3 пятерки или *трижды* пять будет 15; 4 пятерки или *четырежды* пять будет 20 и т. д. (А. Пчелко. — Методическое руководство к стабильным учебникам арифметики, стр. 30.)

Изучение остальных случаев умножения и деления по содержанию. Остальные случаи умножения и деления по содержанию изучают по тому же плану, что и умножение и деление по 5. Поэтому мы не будем подробно разбирать каждую группу табличных упражнений в отдельности, а ограничимся лишь теми указаниями, которые соответствуют особенностям той или иной группы.

Набирая шестерки, мы должны подчеркнуть связь „счета шестерками“ со „счетом тройками“. Если мы выпишем подряд все числа, кратные трех, и будем называть их через одно, то мы получим числа, кратные шести:

3, **6,** 9, **12,** 15, **18,** 21, **24,** 27, **30.**

Надо воспользоваться этой связью, довести ее до сознания учащихся. Это можно сделать уже во *время подготовительных* упражнений.



Черт. 85.

Учитель откладывает на счетах 3 шарика, а затем на той же проволоке он добавляет еще 3 шарика. На второй проволоке он кладет опять сначала 3 шарика (дети считают: девять), а затем на той же проволоке еще 3 шарика (дети считают: двенадцать).

Набрав таким образом 5 шестерок, учитель продолжает тем же способом набирать остальные 5 шестерок, пока не наберет на 10 проволоках 10 шестерок или 60 шариков.

Потом то же упражнение проделывается короче: учитель набирает *сразу* по шесть шариков, а дети называют числа, кратные шести.

При вычислениях связь между умножением 3 и 6 может быть показана на тех же счетах. Она заключается в том, что *множимое* мы разлагаем на тройки и пользуемся тем, что дети уже умеют умножать 3 на все числа первого десятка.

Так, чтобы умножить 6 на 7, мы умножаем 3 на 7 и складываем 21 и 21; чтобы умножить 6 на 9, умножаем 3 на 9 и складываем 27 и 27 и т. д.

Наряду с этим приемом разложения множимого остаются в силе и другие приемы умножения — прием разложения на части множителя, прием перестановки сомножителей. Так, вместо того чтобы умножать 6 на 5, удобнее умножить 5 на 6; вместо того, чтобы умножать 6 на 10, легче умножить 10 на 6.

При изучении умножения восьми следует установить связь этой группы табличных упражнений с умножением четырех. При умножении девяти

можно опираться на умножение трех, но можно также воспользоваться близостью девятки к 10. Учитель откладывает на счетах 3 десятка, а затем на каждой проволоке отбрасывает по одному шарику. На каждой проволоке остается по 9 шариков. Значит, чтобы 9 умножить на 3, надо по 10 взять 3 раза и отнять 3 шарика; получится 27 шариков. Так же прорабатываются и остальные случаи умножения девяти.

Умножение и деление по 7 — одна из наиболее трудных групп табличных упражнений. Преимущество ее, однако, заключается в том, что она изучается последней, а потому во всех случаях мы вправе пользоваться приемом перестановки сомножителей. Полезно также разлагать множимое 7 на 5 и на 2. Умножение пяти является одним из наиболее легких случаев умножения — целесообразно его использовать при изучении умножения семи.

Половина, четверть, восьмая.

Содержание и план работы. Изучению деления числа на равные части полезно предпослать деление на равные части предмета — круга, квадрата, полоски, отрезка прямой. Деля предметы, дети уясняют себе понятие *доли, части,* с которыми затем придется встретиться при нахождении *части числа.*

Понятия о долях должны опираться на предметные образы; простейшие операции — сложение и вычитание дробей, составленных из *одноименных* долей — совершаются по соображению, основанному на образных представлениях.

О *половине* дети должны знать следующее:

Чтобы получить половину круга, квадрата и т. п., надо *целый* круг, *целый* квадрат разделить на 2 равные части.

В целом круге, листе и т. д. 2 половины.

Половины равны.

Из двух половин можно составить целый предмет.

Из трех половин составляется целый предмет и половина или полтора.

О *четверти* дети должны знать следующее:

Чтобы получить четверть круга, квадрата и т. п., надо целый круг, целый квадрат разделить на 4 равные части.

Четверти равны.

В целом круге 4 четверти; в половине круга — 2 четверти.

Обратно: из 2 четвертей можно составить одну половину; из 4 четвертей — 2 половины или целый круг.

О *восьмой* дети должны знать следующее:

Чтобы получить восьмую долю, надо целый круг, целый квадрат или полоску разделить на 8 равных частей.

Восьмушки равны.

В целом круге 8 восьмушек; в половине — 4 восьмушки; в четверти — 2 восьмушки; в двух четвертях 4 восьмушки; в трех четвертях — 6 восьмушек (*раздробление*).

Обратно: из 2 восьмушек можно составить одну четверть; из 4 восьмушек — две четверти или полкруга; из 6 восьмушек — три четверти; из 8 восьмушек — четыре четверти, две половины или целый круг (превращение).

Все перечисленные вопросы можно проработать в такой последовательности: 1. проработка половины и четверти; 2. проработка восьмой и 3. сложение и вычитание одноименных дробей.

Рассмотрим каждую часть этого плана подробнее.

Проработка половины и четверти. Познакомить детей с половиной можно следующим образом. Учитель дает каждому из учащихся по два равных кружка диаметром не больше 5 *см*. Чтобы удобнее было направлять работу, у учителя тоже должны быть круги покрупнее, по 20 *см* в диаметре.

По указанию учителя дети сгибают один из своих кружков пополам, а затем аккуратно разрывают или разрезают целый круг на 2 равные части. Каждую такую часть вслед за учителем они называют *половиной*. Наложив половины одну на другую, они убеждаются в том, что половины равны.

В тетрадях дети наклеивают рядом целый круг, круг, составленный из половинок — и, наконец, полкруга. Глядя на них, ребята формулируют под руководством учителя выводы: *в целом круге две половины; половины равны.*

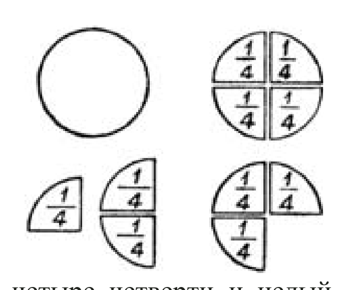
На каждой половинке дети пишут цифрами $\frac{1}{2}$. Запись половины можно объяснить так: чтобы получить половину, мы делим круг на 2 равные части; число 2 пишем *под* чертой. Таких частей мы взяли *одну*; это записано над чертой.

Было бы неправильно объяснять запись дроби на первом году обучения так, как это сделано в „Методике математики“ под ред. Л. Лейферта (стр. 102): „Учитель говорит: у меня был один круг (и пишет 1), я его разделил (проводит под единицей черту) на две равные части (пишет под чертой 2), получилась $\frac{1}{2}$ “. Для детей дробь — это одна или несколько равных долей целого, но никак не частное от деления числителя дроби на ее знаменатель.

Знакомство с четвертью ведется по тому же плану, что и знакомство с половиной. Наклеив у себя в тетрадях целый круг и круг, составленный из четвертушек, дети формулируют выводы: *в целом круге четыре четверти; четверти равны* (черт. 86).

Затем учитель предлагает детям наклеить в тетрадях четверть круга, две четверти круга и три четверти круга. Это упражнение покажет, усвоили ли дети прием получения дроби. Этот прием они должны уметь объяснить:

чтобы получить четверть, надо целый круг разделить на 4 равные части и взять *одну* такую часть; чтобы получить две четверти, надо целый круг разделить на 4 равные части и таких частей взять *две*; чтобы получить три четверти круга, надо целый круг разделить на 4 равные части и таких частей взять *три*.



Черт. 86.

Сопоставляя две четверти и половину круга, четыре четверти и целый круг, дети устанавливают, что из *двух четвертей можно составить половину, а из четырех четвертей — целый круг.*

Познакомившись с четвертыми долями круга, дети затем делят на 4 равные части квадрат, полоску и т. д., повторно прорабатывая те выводы, которые они сделали по отношению к долям круга.

Проработка восьмой на наглядных пособиях. Конкретное представление о восьмой доле дети получают при делении предмета (круга, квадрата, полоски и пр.) на 8 равных частей. Важен не только полученный образ дроби, но и самый процесс деления предмета на равные части. Деля круг, квадрат, полоску или отрезок прямой на 8 равных частей, дети усваивают идею *последовательного деления;* чтобы разделить предмет на 8 равных частей, надо разделить его пополам, каждую половину снова пополам и полученные доли опять пополам. Кроме того дети должны понять *процесс получения дроби, состоящей из нескольких долей*. Например, чтобы получить $\frac{5}{8}$ листа бумаги, надо разрезать, разделить этот лист на 8 равных частей и взять 5 таких частей. С практической точки зрения иногда бывает удобнее только наметить деление, но не производить его фактически, т. е. например, не резать бумаги на куски. Однако, с методической точки зрения важно именно *разрезать* предмет на 8 равных частей и *взять* несколько таких частей, чтобы дети отчетливо представили себе состоящий из двух этапов процесс получения дроби.

Сложение и вычитание одноименных дробей. Опорой для образования понятия сложения и вычитания дробей должны служить, как и в предшествующих упражнениях, наглядные, а не цифровые образы дробей. Складывая $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$, ученик должен видеть перед собой $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ предмета, например, круга. Тогда для него будет совершенно убедителен результат сложения — $\frac{4}{4}$ который он тут же сумеет назвать целым кругом. То же относится и к вычитанию. Пренебрежение этим дидактическим требованием привело бы к пе-

чальным результатам: ученик, который не представляет себе слагаемых дробей в виде частей предмета, а видит только цифры, легко впадает в ошибку, складывая числитель с числителем, а знаменатель со знаменателем дроби.

На втором году обучения изучаются только простейшие случаи сложения и вычитания одноименных дробей, а именно, сложение и вычитание *без перехода через единицу.*

Начинаем со сложения и вычитания половин и четвертей. Учитель раздает детям по 2 небольших кружка разного цвета. Каждый из них делят пополам. На половинках записывают цифрами $\frac{1}{2}$. Из двух разноцветных половинок составляют целый круг. Наклеив его в тетрадь, они записывают под кругом: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. Под суммой записывают соответствующую разность: $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Точно так же дети изображают суммы и разности дробей, составленных из четвертых долей. Вот эти суммы и разности:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \qquad \frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1 \qquad 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

Затем можно перейти к изучению сложения и вычитания дробей, составленных из восьмых долей. При сложении и вычитании восьмых получаются сократимые дроби $\frac{2}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{6}{8}$ и $\frac{8}{8}$, которые учащиеся должны уметь преобразовать соответствующим образом. Имея перед собою наглядные изображения этих дробей, учащийся непосредственно видит, что $\frac{2}{8}$ составляют $\frac{1}{4}$, что $\frac{4}{8}$ составляют $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{8}$ составляют $\frac{3}{4}$ предмета. Цифровые обозначения этих операций служат только для записи результатов, но не являются средством для вычислений. Надо давать детям как можно больше наглядных упражнений — на кусках бумаги, на графических образах дроби в тетрадях. Не следует торопиться с переходом к решению задач на дроби без наглядных пособий и при малейших затруднениях необходимо снова обращаться к наглядным образам.

Сведения о половине, четверти и восьмой не следует давать детям сразу, оставив на время целые числа. Наоборот, надо разбить этот материал на части и проработать понемногу, вперемежку с остальными отделами курса.

Умножение и деление на равные части.

Содержание и план работы. При повторной проработке умножения следует элементы этого действия располагать по постоянному множителю — тогда удобно на основе умножения проработать соответствующие случаи деления на равные части. Так, умножая все числа первого десятка на 4 и зная, что *четырежды* пять — 20, *четырежды* шесть — 24, *четырежды* семь — 28 и т. д., мы будем делить 20, 24, 28 и т. д. на 4 равные части. Допуская по отношению к умножению технические обороты, как *трижды*, *четырежды* и т. п., по отношению к делению мы все еще продолжаем пользоваться образными выражениями на основании соображений, о которых говорилось выше (стр. 101). Поскольку в данное время изучается деление на равные части, мы употребляем выражение *разделить на столько-то равных частей.*

При повторной проработке табличного умножения должна быть достигнута полная беглость в нахождении табличных произведений. Поэтому деление еще меньше, чем раньше, нуждается в особых вычислительных приёмах: частное дети просто берут из таблицы умножения. Вот почему последовательность в изучении отдельных групп табличных упражнений в это время уже не играет очень большой роли. Однако, поскольку понятие о части *числа* тесно связано с понятием о части предмета, т. е. с предшествующим изучением половины, четверти и восьмой, естественно и деление на равные части числа начать с деления на 2, 4 и 8 равных частей. Расположив аналогичным образом и остальные табличные упражнения, мы должны будем затем проработать деление на 3, 6, 9, на 5, 10 и на 7 равных частей.

Твердо усвоив наизусть таблицу умножения, на основе знания табличных произведений учащиеся должны бегло и безошибочно производить табличное деление.

Раздельное изучение видов деления подготовляет почву для их сопоставления и объединения в одно действие деления. Такое объединение к концу проработки сотни должно найти отражение в языке учащихся: наряду с образными выражениями *разделить по столько-то и разделить на столько-то равных частей* можно ввести выражение *разделить на столько-то.*

Указания к проработке отдельных групп табличных упражнений. Внутри каждой табличной группы последовательность упражнения может быть различна. Так, можно умножать на 8 все числа первого десятка подряд и соответственно этому пройти те случаи деления на равные части, которые в частном тоже дают подряд все числа первого десятка. Но можно расположить умножение внутри данной группы в такой последовательности, при которой удобнее пояснять вычислительные приемы, основанные на распределительном свойстве умножения и деления. Тогда, например, при ум-

ножении на 4 и делении на 4 равные части, упражнения придется расположить в следующем порядке:

1) <u>2 × 4</u>, <u>4 × 4</u>, 8 × 4; <u>8 : на 4</u>, <u>16 : на 4</u>, 32 : на 4;

2) <u>3 × 4</u>, 6 × 4, 9 × 4; <u>12 : на 4</u>, 24 : на 4, 36 : на 4;

3) <u>5 × 4</u>, 10 × 4, 7 × 4; <u>20 : на 4</u>, 40 : на 4, 28 : на 4;

Подчеркнуты те случаи, которые уже изучены на первом году обучения. Умножение на 2 и деление на 2 равные части целиком известно детям, поэтому здесь может быть речь лишь о беглом повторении этой части таблицы. Что касается новых случаев деления, то, как правило, они прорабатываются на основе умножения. Если бы, однако, оказалось, что дети еще недостаточно твердо знают таблицу умножения, можно использовать предложенную нами группировку упражнений для применения при делении специальных вычислительных приемов.

Пусть, например, надо 32 разделить на 4 равные части, причем учащийся забыл соответствующий случай умножения (8 × 4 = 32). Тогда можно опереться на предшествующий случай деления. Так, 16 разделить на 4 равные части, получится 4. Но 32 — это 16 да 16. Значит, если 32 разделить на 4 равные части, получится в каждой части по 8. Можно и иначе разбить делимое: 20 : на 4 = 5; 12 : на 4 = 3; 5 + 3 = 8.

Прием последовательного умножения и деления, основанный на сочетательном свойстве этих действий, еще не следует вводить: он значительно труднее других указанных приемов и кроме того, он неизбежно приводит к внетабличному умножению и делению. Так, если бы захотели применить прием последовательного деления к делению 36 на 4, пришлось бы сначала делить 36 на 2 равные части, т. е. производить внетабличное деление. Это нарушило бы систему построения курса.

Труднее всего делить на 7, 9 и 10 равных частей. Приемы здесь остаются те же, что и раньше, но число упражнений должно быть достаточным, чтобы дети научились выполнять это действие. Как правило, деление производится на основе умножения. Результат берется сразу из таблицы умножения или выясняется путем проб. При делении на 10 можно рассуждать так: разделим каждый десяток на 10 равных частей; в каждой части будет по одной единице. Поэтому, если надо разделить 60, т. е. 6 десятков на 10 равных частей, в каждой части будет по 6 единиц; если надо разделить 80, т. е. 8 десятков на 10 равных частей, в каждой части будет по 8 единиц и т. д.

Дети уже знают, что такое половина, четверть и восьмая доля или часть предмета. При изучении табличного деления на равные части, они занимаются вычислением доли или части числа. Половину, четверть, восьмую они

умеют записывать цифрами. Запись цифрами других долей не вводится; дети только учатся их называть и вычислять. Учащиеся должны знать, что при делении числа на 3 равные части, они нашли *треть* числа, что при делении числа на 6 равных частей, они нашли *шестую* часть и т. д. С другой стороны они должны понимать, что для вычисления трети числа, надо разделить это число на 3 равные части, для вычисления седьмой части — на 7 равных частей и т. д.

Сопоставление обоих видов деления. Когда деление по содержанию и деление на равные части проработаны отдельно одно от другого, и когда дети хорошо уяснили себе конкретный смысл каждого из них, можно сопоставить оба вида деления, т. е. выявить их сходство и различие. Сделать это следует сначала на наглядных пособиях, а затем на задачах.

Учитель предлагает детям связать 15 спичек пучками, по 3 спички в каждом пучке. Сколько выйдет пучков?

Дети производят деление 15 по 3 и записывают в тетрадях:

15 сп. : по 3 сп. = 5.

Затем учитель предлагает другие 15 спичек разделить на 3 равные части. Сколько спичек будет в каждой части?

Учащиеся делят 15 спичек на 3 равные части и записывают:

15 сп. : на 3 = 5 сп.

Обе записи учитель пишет на доске рядом:

15 сп. : по 3 сп. = 5 15 сп. : на 3 = 5 сп.

Сравним эти две записи.

В чем разница? В первом случае мы узнаем, сколько раз 3 спички содержатся в 15 спичках. Это *деление по содержанию*. Во втором случае мы делим 15 спичек на 3 равные части. Это *деление на равные части.*

В чем сходство? В обоих случаях мы употребляем одно и то же слово „разделить“. В обоих случаях числа одни и те же и ответы равны.

Вывод. Итак, делим ли мы 15 спичек по 3 спички или 15 спичек на 3 равные части, в обоих случаях в ответе получается число 5. Поэтому запись деления в обоих случаях можно читать одинаково: 15 *разделить на 3 получится* 5.

Чтобы дети хорошо усвоили этот вывод, они должны перерешать много задач, аналогичных данному упражнению со спичками. Задачи эти группируются по две. У каждой такой пары данные числа одни и те же, но деление имеет разный смысл. На каждой такой паре дети повторяют приведенные

выше рассуждения. В результате они должны вполне осознать сходство и разницу обоих видов деления.

Подмеченное сходство не уничтожает разницы, которая существует между делением по содержанию и делением на равные части. Наоборот, осознание сходства должно подчеркнуть эту разницу, чтобы в дальнейшем, встречаясь в задачах с обоими видами деления, дети в каждом из них узнавали действие деления, т. е. умели произвести правильный выбор действия для решения задачи.

С другой стороны, объединение обоих видов деления в одно действие деления дает нам право в тех случаях, когда это удобно, заменять один вид деления другим. Так, решая задачу, в которой надо по смыслу 320 *разделить на* 80 *равных частей* (деление на равные части), мы будем при вычислении частного рассуждать так: 8 десятков в 32 десятках содержится 4 раза (деление по содержанию). Значит 320 разделить на 80 равных частей, получится в каждой части по 4. Обратно, решая задачу, в которой надо 72 *разделить по* 6 (деление по содержанию), мы будем ради удобства вычислений делить сначала 72 на 2 равные части, а затем каждую половину еще на 3 равные части. Получим 12. Значит 72 разделить по 6, будет 12 (раз по 6).

Повторение таблицы умножения и деления и запоминание ее наизусть. Во время вторичной проработки таблицы умножения и совместно с ней деления на равные части, учитель вывешивает на видном месте в классе одну за другой изучаемые части таблицы.

Элементы умножения должны быть расположены по постоянному множителю. Каждую группу упражнений можно начинать с произведения равных сомножителей, чтобы в таблице не было случаев, которые отличаются один от другого только порядком сомножителей.

Таблицу умножения и деления на 2 можно не вывешивать, так как она и без того легко запоминается и без нужды только отвлекала бы внимание учащихся от более трудных групп табличных упражнений.

1

3 × 3 = 9	9 : 3 = 3
4 × 3 = 12	12 : 3 = 4
5 × 3 = 15	15 : 3 = 5
6 × 3 = 18	16 : 3 = 6
7 × 3 = 21	21 : 3 = 7
8 × 3 = 24	24 : 3 = 8
9 × 3 = 27	27 : 3 = 9
10 × 3 = 30	30 : 3 = 10

2

4 × 4 = 16	16 : 4 = 4
5 × 4 = 20	20 : 4 = 5
6 × 4 = 24	24 : 4 = 6
7 × 4 = 28	28 : 4 = 7
8 × 4 = 32	32 : 4 = 8
9 × 4 = 36	36 : 4 = 9
10 × 4 = 40	40 : 4 = 10

3	
5 × 5 = 25	25 : 5 = 5
6 × 5 = 30	30 : 5 = 6
7 × 5 = 35	35 : 5 = 7
8 × 5 = 40	40 : 5 = 8
9 × 5 = 45	45 : 5 = 9
10 × 5 = 50	50 : 5 = 10

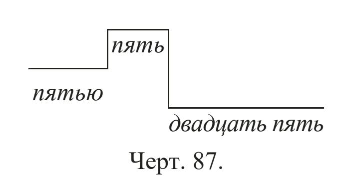
4	
6 × 6 = 36	36 : 6 = 6
7 × 6 = 42	42 : 6 = 7
8 × 6 = 48	48 : 6 = 8
9 × 6 = 54	54 : 6 = 9
10 × 6 = 60	60 : 6 = 10

5	
7 × 7 = 49	49 : 7 = 7
8 × 7 = 56	56 : 7 = 8
9 × 7 = 63	63 : 7 = 9
10 × 7 = 70	70 : 7 = 10

6	
8 × 8 = 64	64 : 8 = 8
9 × 8 = 72	72 : 8 = 9
10 × 8 = 80	80 : 8 = 10
9 × 9 = 81	81 : 9 = 9
10 × 9 = 90	90 : 9 = 10

Читать умножение в это время надо так: трижды три — 9; трижды четыре — 12, трижды пять — 15 и т. д. Читать деление надо так: 9 разделить на 3 будет 3; 12 разделить на 3 будет 4 и т. д.

Усвоение таблицы наизусть не может и не должно начинаться с механической зубрежки. Но наряду со способами сознательного усвоения таблицы в процессе вычислений, можно пользоваться и такими средствами запоминания, как зрительное восприятие написанных рядом чисел: 7 × 4 = 28 или 56 : 7 = 8, а также *ритмическим чтением* таблицы отдельными учениками и всею группою хором. Эти приемы не разрушают ценности сознательного усвоения, если они не предшествуют вычислениям, а, наоборот, следуют за ними.



Черт. 87.

Приемы ритмического чтения различных числовых формул подробно разработаны *С. И. Шохор-Троцким* („Методика начального курса математики“, изд. 1924 г.).

Произведение 5 × 5 = 25 читаем так: *средняя высота* — пятью, *выше* — пять, *низко* — двадцать пять. При этом счет может идти то на 3, то на 4, в зависимости от характера числительных. Например, произведение 5 × 5 = 25 читаем со счетом на 4:

раз	*два*	*три*	*четыре*
пятью	пять	двадцать	пять

После слов „пятью пять“ делается небольшая пауза.

В других случаях счет будет на 3. Например:

раз	*два*	*три*
пятью	восемь	сорок

После слов „пятью восемь“ также делается небольшая пауза.

Для лучшего запоминания таблицы полезно представить ее в таком виде, чтобы учащийся мог окинуть ее одним взглядом, сразу охватить тот материал, который он должен знать наизусть. С этой целью можно все табличные произведения, за исключением чисел второго десятка, сгруппировать по десяткам:

21,	24,	25,	27,	28,	30.
32,	35,	36,	40,		
42,	45,	48,	49,	50,	
54,	56,	60,			
63,	64,	70,			
72,	80,				
81,	90,				

Всего надо помнить 25 чисел, состав которых из табличных сомножителей дети должны знать наизусть. Повторять эти произведения можно прежде всего по горизонтальным рядам, подчеркивая в каждом ряду те случаи, которые труднее запоминаются.

Затем полезно рассмотреть следующие группы:

1. Круглые десятки. Чтобы легче запомнить все эти произведения, дети должны пользоваться приемом перестановки сомножителей. Например, $3 \times 10 = 30$, так как $10 \times 3 = 30$. Так как числа 30 и 40 можно составить не только из десятков, но и из пятков, следует помнить, что пятков в каждом из них вдвое больше, чем десятков.

2. Один из сомножителей равен 5. Эти произведения легко запоминаются, так как легко запоминаются по своей связи с десятком числа „пятиричного“ ряда. Дети подмечают, что при умножении на 5 и при умножении пяти получаются числа, оканчивающиеся нулем или пятью. Это помогает запомнить такие более трудные произведения, как 7×5 и 9×5.

3. Полные квадраты. Некоторые из этих произведений звучат ритмично и потому легко запоминаются. Надо обратить на это внимание детей. Но и в тех случаях, когда особой ритмичности не наблюдается, эти произведения запоминаются легче остальных и могут служить опорой при вычислении соседних, более трудных произведений. Например, $8 \times 8 = 64$, а потому $8 \times 7 = 64 - 8 = 56$; или: $7 \times 7 = 49$, а потому $7 \times 8 = 49 + 7 = 56$ и т. д.

4. Один из сомножителей равен 9. В этих случаях число 9 заменяем числом 10, а затем отнимаем излишне набранные единицы. Например, $9 \times 7 = 10 \times 7 - 7 = 63$.

5. Остаются 7 произведений, которые не вошли ни в одну из перечисленных групп, а именно: 21, 24, 28, 32, 42, 48 и 56. Кроме произведения 32, которое стоит особняком и не особенно затрудняет учащихся, остальные 6 произведений полезно повторять парами: 21 и 42, 24 и 48, 28 и 56. Средняя пара легче других, может быть, оттого, что фраза „шестью восемь сорок восемь“ звучит ритмично. Кроме того эти числа относятся к первому „кусту“ табличных упражнений, основанному на счете парами, четверками и восьмерками, т. е. — к наиболее легкой части таблицы. Труднее две остальные пары. Для лучшего запоминания этих произведений полезно сопоставлять числа каждой пары между собою. Например, если мы знаем, что $7 \times 4 = 28$, то легко вычислить произведение 7×8, так как $7 \times 8 = 7 \times 4 + 7 \times 4 = 28 + 28 = 56$.

Термины больше, меньше, увеличить, уменьшить во столько-то раз.

Общие замечания. При изучении умножения и деления в пределах 100 вводятся выражения *больше и меньше во столько-то раз, увеличить и уменьшить во столько-то раз*. Дети знакомятся с этими выражениями постепенно, сначала на фактическом материале, на предметах, а затем решают задачи, в которых встречаются эти выражения. После этого указанные выражения применяются и по отношению к отвлеченным числам.

В основе выражений *больше и меньше во столько-то раз, увеличить и уменьшить во столько-то раз* лежит понятие об отношении двух чисел, которое на данной ступени обучения связывается с делением по содержанию. Узнавая, сколько раз одно число содержится в другом, мы тем самым узнаем, во *сколько раз одно число больше другого* или во *сколько раз одно число меньше другого*. Так, деля 30 по 5, мы находим число 6, которое является отношением этих чисел и показывает, во сколько раз 30 больше 5 и во сколько раз 5 меньше 30.

Исходя из равенства 30 : по 5 = 6, можно построить следующие задачи:

1. Дан делитель и отношение, найти делимое. Например:

На ручном станке можно наткать в день 5 *м* ткани, на фабричном *в 6 раз больше*. Сколько ткани можно наткать в день на фабричном станке?

Ту же задачу можно задать иначе:

На ручном станке можно наткать в день 5 *м* ткани, *в 6 раз меньше*, чем на фабричном. Сколько ткани можно наткать в день на фабричном станке?

Обе эти задачи решаются *умножением*. Вторая задача труднее, так как здесь умножение задано в терминах деления.

2. Дано делимое и отношение, найти делитель. Например:

На фабричном станке можно наткать в день 30 *м* ткани, на ручном станке *в 6 раз меньше*. Сколько ткани можно наткать в день на ручном станке?

Ту же задачу можно задать иначе:

На фабричном станке можно наткать в день 30 *м*, *в 6 раз больше*, чем на ручном. Сколько ткани можно наткать в день на ручном станке?

Обе эти задачи решаются *делением на равные части*.

Вторая задача труднее, так как здесь деление задано в терминах умножения.

3. Найти отношение двух чисел. Например:

На фабричном станке можно наткать в день 30 *м* ткани, а на ручном — 5 *м*. *Во сколько раз больше* ткани можно наткать на фабричном станке, чем на ручном?

К той же задаче можно иначе поставить вопрос:

Во сколько раз меньше ткани можно наткать на ручном станке, чем на фабричном?

Оба вопроса решаются *делением по содержанию*. Деление в этом случае иногда называют *кратным сравнением*, а результат деления — *кратным отношением двух чисел*.

В основе всех этих задач лежит понятие об отношении. В первых двух группах задач *отношение дано*. Вот почему в этих задачах выражения *больше и меньше во столько-то раз* имеют *утвердительную* форму. В третьей группе задач отношение является *искомым*. Вот почему в этом случае выражения *больше и меньше во столько-то раз* выступают в виде *вопроса*.

С первым видом задач дети знакомятся при первой проработке табличного умножения. Второй вид задач вводится при изучении деления на равные части. Задачи на кратное сравнение даются после изучения таблицы умножения и деления или даже после внетабличного умножения и деления. В это же время, но не раньше, дети могут решать „трудные“ задачи первого и второго вида, т. е. задачи, в которых умножение дается в терминах деления, а деление — в терминах умножения.

Больше во столько-то раз. Усвоение смысла выражения *больше в 2, 3, 4 и т. д. раза* надо связать с простым, понятным для детей образом — группами кубиков, шариков на классных счетах и т. п.

Учитель откладывает на первой проволоке классных счетов 2 шарика, на второй проволоке *3 раза по 2 шарика*.

Сколько шариков на второй проволоке? Дети отвечают на этот вопрос и записывают действие, которым он решается: $2 \times 3 = 6$.

После этого учитель вводит новое выражение: можно сказать — на второй проволоке 3 раза по 2 шарика или иначе — *в три раза больше шариков*, чем на первой проволоке. По наводящим вопросам дети повторяют слова учителя:

Вопросы:	*Ответы:*
а) Сколько шариков на первой проволоке?	2 шарика
б) Сколько раз по 2 шарика на второй проволоке?	3 раза по 2 шарика
в) Во сколько раз больше шариков на второй проволоке, чем на первой?	В 3 раза больше

Когда на ряде аналогичных упражнений смысл выражения во *сколько-то раз больше* усвоен, вопрос ставится прямо. Положите налево 3 кубика. Положите направо в 4 раза больше кубиков, чем налево. Сколько кубиков будет направо?

Ученик рассуждает так: в 4 раза больше — это значит 4 раза по 3; поэтому направо будет всего 12 кубиков.

Как вы узнали, что кубиков будет 12? спрашивает учитель.

По 3 взяли 4 раза, получилось 12, отвечают учащиеся. Решение ($3 \times 4 = 12$) записывают в тетрадях.

Тот же вопрос надо проработать на других наглядных пособиях — спичках, кружках, квадратиках, а также ввести различные варианты выражения: *больше во столько-то раз*, например: длиннее, шире, выше, тяжелее и т. д. во столько-то раз. Выражение длиннее во столько-то раз надо связать с измерением и черчением. После этого можно перейти к решению задач, в которых встречаются все эти выражения.

Меньше во столько-то раз. Учитель откладывает в первом ряду на счетах 6 шариков.

Найдем *третью* часть всех шариков. Сколько шариков в каждой части? Дети отвечают на этот вопрос и записывают действие, которым он решается: $6 : 3 = 2$.

После этого учитель вводит новое выражение: мы нашли третью часть 6 шариков. Можно сказать, что полученная часть *в 3 раза меньше шести.*

Эту часть, т. е. 2 шарика, учитель откладывает на второй проволоке и задает детям наводящие вопросы для повторения:

Вопросы:	*Ответы:*
а) Сколько шариков на первой проволоке?	6 шариков.
б) На сколько равных частей мы их разделили?	На 3 равные части.
в) Во сколько раз каждая часть меньше шести?	В 3 раза меньше.

Когда на ряде аналогичных упражнений смысл выражения во *столько-то раз меньше* усвоен, вопрос ставится прямо. Положите налево 8 кубиков. Положите направо в 4 раза меньше кубиков, чем налево. Сколько кубиков будет направо?

Ученик рассуждает так: В 4 раза меньше — это значит, четвертая часть всех кубиков, т. е. 2 кубика.

Как вы узнали, что в каждой части будет по 2 кубика? спрашивает учитель.

Ответ: 8 разделили на 4 равные части, получилось в каждой части по 2. Решение (8 : 4 = 2) записывают в тетрадях.

Тот же вопрос надо проработать на других наглядных пособиях. Следует также ввести выражения: короче, уже, ниже, легче и т. д. во столько-то раз. Те из них, которые связаны с пространственными представлениями, следует соединить с отмериванием и черчением. После этого можно перейти к решению задач.

Увеличить, уменьшить во столько-то раз. Учитель предлагает поставить на стол 4 кубика; прибавить к ним еще 4 кубика и еще 4 кубика. Сколько раз взяли мы по 4 кубика? Сколько кубиков получилось? Дети решают этот вопрос умножением.

Учитель продолжает: *Было* 4 кубика, *стало* 3 раза по 4 кубика. Иначе говорят так: число кубиков *увеличилось в 3 раза*. Дети повторяют это новое выражение.

Понятие *уменьшить во столько-то раз* следует сблизить с понятием нахождения части числа. Учитель предлагает: положим на стол 18 спичек. Найдем *треть* этого числа. Для этого 18 кубиков надо разделить на 3 равные части. Оставим одну часть, а две отодвинем подальше. Дети решают этот вопрос делением.

Учитель продолжает: Было 18 спичек. Мы нашли *треть* этого числа. Иначе говорят: число спичек *уменьшилось в 3 раза*. Дети повторяют несколько раз это новое выражение применительно к другому числу спичек.

При решении задач, в которых встречаются выражения *увеличить и уменьшить во столько-то раз* надо спрашивать детей: что это значит или как сказать иначе, чтобы дети обнаружили понимание условного смысла этих выражений.

Кратное сравнение чисел. Решение задач, в которых отношение *дано*, должно было подготовить учащихся к решению задач, в которых оно является *искомым*. Но прежде чем решать задачи на кратное сравнение, необходимо проработать этот вопрос на наглядных пособиях. Необходимо вести эту проработку таким образом, чтобы действия, которые дети производят над предметами, подсказывали то арифметическое действие, которым решается данный вопрос. Здесь, как и в случае разностного сравнения, основная трудность заключается в выборе действия.

Учитель предлагает учащимся отсчитать 3 красных спички и 18 зеленых. Затем ставится вопрос: узнаем, *во сколько раз* зеленых спичек *больше*, чем красных.

Чтобы ответить на этот вопрос, учитель предлагает детям связать красные спички в пучок, а затем связать в *такие же* пучки зеленые спички.

Дети связывают спички в пучки и тем самым делят 18 спичек по 3 спички.

После этого учитель ставит вопросы, а дети отвечают:

	Вопросы:	*Ответы:*
а)	Сколько красных пучков?	1 пучок.
б)	Сколько зеленых пучков?	6 зеленых пучков.
в)	Сколько раз 3 спички содержатся в 18 спичках?	6 раз.
г)	Во сколько же раз 18 спичек больше, чем 3 спички?	В 6 раз больше.
д)	Как вы это узнали?	18 разделили по 3, получилось 6 раз по 3.
е)	Как это записать?	18: по 3 = 6.
ж)	Итак, что же мы узнали?	Мы узнали, что зеленых спичек в 6 раз больше, чем красных.

По такому же плану прорабатывается и другой вопрос: во сколько раз одно число меньше другого.

Подобного рода упражнения надо проделать несколько раз, меняя предметы. В конце концов дети должны понять, что для ответа на вопрос, во сколько раз одно число *больше* другого, надо узнать, сколько раз одно из данных чисел содержится в другом. Точно также, отвечая на вопрос, во сколько раз одно число *меньше* другого, надо узнать, сколько раз одно из данных чисел содержится в другом. Другими словами, оба вопроса решаются *делением по содержанию*.

Больше и меньше, увеличить и уменьшить во столько-то раз при отвлеченных числах. Когда дети научатся сравнивать в кратном отношении численность групп конкретных предметов, можно ставить перед учащимися вопросы кратного сравнения в отвлеченной форме. Сначала предлагаются более легкие упражнения, в которых отношение дано. Например:

1. По 6 взять 4 раза. Сколько получится? Что больше 24 или 6? Во сколько раз 24 больше 6? Во сколько раз увеличилось число 6?
2. Назовите число, которое больше 7 в 3 раза. Назовите число, которое больше 9 в 5 раз.
3. Увеличьте 8 в 6 раз. Увеличьте 4 в 9 раз.
4. Нашлите пятую часть 35. Сколько получится? Что меньше: 35 или 7? Во сколько раз 7 меньше 35? Во сколько раз уменьшилось число 35?
5. Назовите число, которое меньше 48 в 6 раз. Назовите число, которое меньше 56 в 8 раз.
6. Уменьшите 72 в 8 раз. Уменьшите 63 в 7 раз.

Затем предлагаются более трудные вопросы, в которых отношение является *искомым*. Например:

1. Во сколько раз 32 больше 4? Что надо сделать, чтобы ответить на этот вопрос?
2. Во сколько раз 9 меньше 45? Что надо сделать, чтобы ответить на этот вопрос?
3. Что и во сколько раз больше: 42 или 6? Как решить этот вопрос?
4. Что и во сколько раз меньше: 8 или 64? Как решить этот вопрос?

Полезно сопоставлять выражения: увеличить *на* столько-то и увеличить во столько-то раз; уменьшить *на* столько-то и уменьшить во столько-то раз. Например:

1. Увеличь 9 на 4. Увеличь 9 в 4 раза.
2. Уменьши 42 на 6. Уменьши 42 в 6 раз.
3. На сколько 21 больше 7? Во сколько раз 21 больше 7?
4. На сколько 6 меньше 24? Во сколько раз 6 меньше 24?

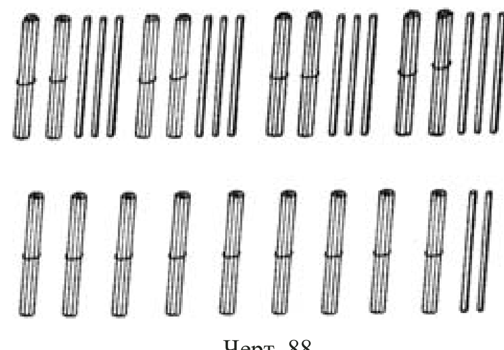
Внетабличное умножение и деление.

Общие замечания. Вслед за табличным изучается внетабличное умножение и деление. В это время уже можно рассматривать оба вида деления совместно, так как дети теперь понимают, что при одинаковых числах в обоих случаях получается один и тот же результат. Поэтому при расчленении материала этой главы нет надобности учитывать вид деления, как таковой. Независимо от вида деления, план работы может быть следующим: 1. внетабличное умножение и деление на однозначное число; 2. умножение и деление в пределах 100 на круглые десятки, и 3. умножение и деление в пределах 100 на двузначное.

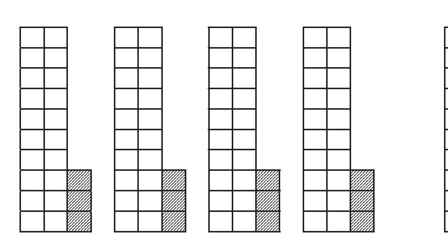
Чтобы умножать и делить двузначное на однозначное и однозначное на двузначное, достаточно знать наизусть таблицу умножения и деления и уметь пользоваться десятичным составом двузначного числа. Значение этого раздела курса, главным образом — в большом разнообразии вычислительных приемов, которые являются своего рода введением в изучение умножения и деления многозначных чисел. Наряду с известными уже детям приемами, основанными на распределительном и переместительном свойствах действий, здесь применяется прием последовательного умножения и деления. Изучение всех этих приемов и составляет главную цель этой главы курса. В зависимости от приема, которым удобнее воспользоваться в данном конкретном случае, мы будем и деление понимать то как деление по содержанию, то как деление на равные части. Так, при делении на однозначное число, если делитель можно разложить на множители, мы будем пользоваться приемом последовательного деления даже в том случае, когда по смыслу задачи надо узнать, сколько раз одно число содержится в другом. Наоборот, при делении на двузначное число выгоднее рассматривать это действие, как деление по со-

держанию; во всяком случае прием последовательного деления при двузначном делителе труден для второго года обучения.

Внетабличное умножение и деление на однозначное число. Прием умножения двузначного числа на однозначное основан на разложении множимого на десятичные группы: умножаем сначала десятки, затем единицы множимого на данный множитель и полученные числа складываем. Например, чтобы вычислить произведение 23 × 4, умножаем 20 на 4, получается 80; затем 3 на 4, получается 12; 80 + 12 = 92. Как все вычислительные приемы в пределах сотни, так и это умножение можно пояснить пучками спичек, шариками на счетах, полосками, разделенными на квадратики. Рисунки 88 и 89 показывают, как пояснить умножение 23 на 4 при помощи спичек и квадратиков.



Черт. 88.



Черт. 89.

При умножении на однозначное число мы не касаемся умножения круглых десятков на однозначное, так как этот случай умножения проработан на первом году обучения. Далее, при проработке таких случаев умножения, как 12 × 4, 25 × 2, 15 × 6, 19 × 4 мы не делаем никаких подразделений, так как трудность вычислений не зависит от того, будет ли произведение единиц множимого меньше десяти, равно десяти или больше десяти. Если ученик умеет разложить двузначное число на десятки и единицы и понимает, что следует умножать отдельно десятки, отдельно единицы и полученные числа сложить, — все остальное уже не может затруднить его, так как таблица умножения пройдена и усвоена наизусть.

Наоборот, если мы разберем соответствующие случаи деления, то увидим, что трудность их не одинакова. Кроме того от первого года обучения остались

еще неразработанными такие случаи деления, как деление 50 на 2 равные части, когда в частном получается двузначное число, или 60 по 2 (трудный случай деления по содержанию). Поэтому при изучении внетабличного деления на однозначное придется уделить внимание каждой из следующих групп примеров в отдельности:

1. Деление круглых десятков на однозначное. Деление на равные части круглых десятков, когда в частном получаются круглые десятки (например, 40 : 2), детям уже известно. Эти случаи деления являются опорой в более трудных случаях деления на равные части, когда в частном получается двузначное число. Например, чтобы 50 разделить на 2 равные части, поступаем так: 40 : на 2 = 20; 10: на 2 = 5; 20 + 5 = 25.

Деление по содержанию круглых десятков на однозначное еще не проработано. Пусть надо 40 разделить по 2. Вычисляем сначала так: 20 : по 2 = 10; 20 : по 2 = 10; 10 + 10 = 20. Но дети уже знают, что если делить 40 на 2 равные части, в ответе тоже получится 20. Делить 40 пополам легче, чем делить 40 по 2. Поэтому будем в этих случаях понимать деление, как деление на равные части.

Пусть надо 50 разделить по 2. Этот случай труднее предыдущего, так как в частном получается двузначное число. При вычислениях можно опираться либо на более легкий случай деления по содержанию, либо заменить это деление делением на равные части. Последнее легче. Поэтому будем делить таким образом: 40: на 2 = 20; 10: на 2 = 5; 20 + 5 = 25.

Пусть, наконец, надо 90 разделить на 6 или по 6. На этот раз деление сводится к двум табличным случаям: 60: по 6 = 10; 30: по 6 = 5; 10 + 5 = 15. Или иначе: 60 : на 6 = 10; 30 : на 6 = 5; 10 + 5 = 15. Поскольку 60 делить на 6 равных частей легче, чем 60 делить по 6, надо и в этом случае предпочесть деление на равные части.

Итак, во всех случаях при делении круглых десятков на однозначное удобнее понимать это действие, как деление на равные части.

2. Деление двузначного на однозначное. Сначала надо делить такие числа, у которых число десятков и число единиц делится на данное однозначное число без остатка. Этот случай деления никаких трудностей не представляет. Пусть, например, надо 48 разделить по 4 или на 4. В обоих случаях удобнее делить на равные части, так как легче 40 разделить на 4 равные части, чем 40 разделить по 4. Прием сводится к следующему: 40 : 4 = 10; 8 : 4 = 2; 10 + 2 = 12.

Труднее тот случай, когда число десятков двузначного числа не делится без остатка на данный однозначный делитель. Тогда надо подобрать такое

число десятков, которое было бы легко разделить на это однозначное число. Например, если надо 52 разделить на 4 равные части или по 4, поступаем так: 40 : 4 = 10; 12 : 4 = 3; 10 + 3 = 13. Или еще более трудный случай: 64 : 4. Делим таким образом: 40 : 4 = 10; 24 : 4 = 6; 10 + 6 = 16.

И в этих случаях, подобно всем предыдущим, легче выполнить деление, если рассматривать его, как *деление на равные части*.

В том случае, когда при умножении на однозначное число множитель — составное число, можно воспользоваться приемом *последовательного умножения*. Так, чтобы умножить 18 на 4, можно 18 умножить на 2 и полученное число еще раз на 2. Этот прием можно пояснить графически:

<table>
<tr><td>18</td><td>18</td><td>18</td><td>18</td></tr>
<tr><td colspan="2">36</td><td colspan="2">36</td></tr>
<tr><td colspan="4">72</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td></tr>
<tr><td colspan="2">30</td><td colspan="2">30</td><td colspan="2">30</td></tr>
<tr><td colspan="6">90</td></tr>
</table>

Черт. 90.

В том случае, когда, при делении на однозначное число делитель — составное число, можно воспользоваться приемом *последовательного деления.* Так, чтобы 84 разделить на 6, можно 84 разделить на 2, получится 42, а затем 42 разделить на 3, получится 14. Этот прием тоже можно пояснить графически:

<table>
<tr><td colspan="6">84</td></tr>
<tr><td colspan="3">42</td><td colspan="3">42</td></tr>
<tr><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="8">96</td></tr>
<tr><td colspan="4">48</td><td colspan="4">48</td></tr>
<tr><td colspan="2">24</td><td colspan="2">24</td><td colspan="2">24</td><td colspan="2">24</td></tr>
<tr><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td></tr>
</table>

Черт. 91.

Внетабличное умножение и деление на однозначное можно пройти с учащимися в такой последовательности: умножение и деление на 2, на 3, на 4 и т. д. до умножения и деления на 9 включительно. Внутри каждой группы упражнений следует расположить материал в порядке возрастающей трудности. Вот образцы примеров при умножении и делении на 2 : 32 × 2, 15 × 2, 17 × 2; 40 : 2, 50 : 2, 48 : 2, 74 : 2. Вот еще образцы примеров при умножении и делении на 3 : 22 × 3, 24 × 3, 18× 3; 60 : 3, 69 : 3, 42 : 3, 84 : 3.

Упражнения внутри каждой группы можно подбирать таким образом, чтобы, постепенно переходя от более легких случаев к более трудным, дети сами подмечали связь между ними и на основе этой связи находили

целесообразные вычислительные приемы. Вот образцы такой группировки упражнений применительно к делению на однозначное.

20 : 2	40 : 2	30 : 3	60 : 3	40 : 4	50 : 5
30 : 2	50 : 2	42 : 3	75 : 3	52 : 4	60 : 5
32 : 2	54 : 2	45 : 3	84 : 3	64 : 4	75 : 5
36 : 2	58 : 2	54 : 3	87 : 3	72 : 4	85 : 5

Первые примеры надо проделывать на предметах. Деля тридцать пополам, мы число 30 представляем в виде трех пучков спичек. Тогда дети поймут без затруднения, что сперва надо разделить на 2 равные части два пучка, а третий, раньше чем делить, придется распустить, развязать.

То же следует сказать и о делении 45 на три равные части. Представив 45 наглядно в виде четырех пучков и пяти спичек, дети увидят, что три пучка легко делятся на три равные части, а затем следует деление десятка и пяти единиц.

Умножение и деление на круглые десятки. Умножение на круглые десятки в пределах сотни основывается на умножении на 10. Чтобы взять 20 раз по 2, возьмем 10 раз по 2 и еще 10 раз по 2. Получим 20 и 20, всего 40. Полезно расположить упражнения с таким расчетом, чтобы дети сами подметили вычислительный прием. Так, в первом столбце множитель во всех примерах один и тот же, отчего прием вычисления становится *яснее*. Во втором столбце множители разные, отчего прием становится *общее*.

2 × 20	2 × 20
4 × 20	2 × 40
3 × 20	2 × 50
5 × 20	2 × 30

Графически можно показать, что число клеток в прямоугольнике можно вычислять двумя способами: 2 × 20 = 40 или 20 × 2 = 40. Последний способ легче. Поэтому, при умножении на круглые десятки будем пользоваться приемом перестановки сомножителей.

Деление по 20, по 30, по 40 и по 50 дети научились производить еще на первом году обучения. Деление на столько же равных частей выполняем сначала путем проб. Пусть надо 80 разделить на 20 равных частей. Положим в каждую часть по единице — мало; по 2 — тоже мало; по 3 — мало. Положим, наконец, по 4. Так как 4 × 20 = 80, то, следовательно, 80: на 20 = 4. Делить таким образом неудобно, долго. Вместе с тем дети без труда скажут, сколько раз 20 содержится в 80-ти. А поскольку ответ в обоих случаях один и тот же, предпочтительнее деление на круглые десятки в пределах 100 всегда рассматривать, как *деление по содержанию*.

Умножение и деление на двузначное число. Чтобы умножить однозначное на двузначное, например 4 на 23, поступаем так: 4 × 20 = 80; 4 × 3 = 12; 80 + 12 = 92. Но можно также выполнить умножение, переставив

сомножители. Тогда придется 20 умножить на 4, затем 3 на 4 и полученные числа 80 и 12 складывать. Последний способ легче первого. Поэтому, при умножении однозначного на двузначное всегда будем пользоваться *приемом перестановки сомножителей*.

При делении на двузначное число, будет ли это деление по содержанию или деление на равные части, приходится подбирать частное и проверять предполагаемый ответ при помощи умножения.

Пусть надо 72 спички разделить на 12 равных частей. Положим в каждую часть по 3, по 4 и т. д. спички. Проверка показывает, что этого мало. Кладем в каждую часть по 6 спичек. Так как 6 × 12 = 72, то, следовательно, 72 : на 12 = 6.

Пусть теперь надо 72 разделить по 12. Попробуем взять 2 раза по 12 — мало; 3 раза, 4 раза и т. д. — тоже мало. Наконец, убеждаемся, что 6 раз по 12, будет 72. Значит, 72 : по 12 = 6.

В виду трудности для учащихся деления на двузначное, необходимо производить его сначала на предметах — спичках, палочках и т. п.

Пользоваться приемом последовательного умножения и последовательного деления при умножении и делении на двузначное не следует. Усвоить его отвлеченно было бы трудно, а пояснить каждый раз графически слишком хлопотливо.

Деление с остатком. Не следует искусственно ограничивать деление только теми случаями, когда оно выполняется без остатка. Дети должны встречаться и с таким делением, которое дает остаток.

При делении с остатком можно различать деление на однозначное и двузначное. Внутри каждой группы можно еще различать табличное и внетабличное деление, деление по содержанию и деление на равные части. Во всех этих случаях приходится применять один и тот же *прием деления, основанный на умножении*, т. е. задаваться частным и проверять предполагаемый ответ при помощи умножения. На первых порах необходимо пояснить этот прием при помощи наглядных пособий, т. е. выполнять деление непосредственно на предметах, чтобы дети видели, что такое остаток и как он получается.

Пусть надо 16 спичек разделить по 3 спички. Разложим 16 спичек кучками, по 3 спички в каждой кучке. Сколько выйдет кучек и сколько еще спичек останется? Учащиеся раскладывают спички по 3 и убеждаются, что вышло 5 раз по 3 и еще осталась 1 спичка. Учитель на доске, а учащиеся в тетрадях делают запись. 16 : 3 = 5 (остаток 1). Эту запись они читают так: 16 разделить на 3, получится 5 и в остатке 1.

Пусть теперь те же 16 спичек надо разделить на 3 равные части. Положим в каждую часть по одной спичке, еще по одной и так далее. Сколько спичек будет в каждой кучке? Дети раскладывают спички в 3 кучки, поровну в каж-

дую кучку, и убеждаются, что в каждой части получилось по 5 спичек и еще осталась 1 спичка. И в этом случае на доске и в тетрадях делается запись: $16 : 3 = 5$ (остаток 1), которая читается также, как и в предыдущем случае.

Надо проделать целый ряд таких упражнений, меняя числа и предметы. Оказывается, что при одном и том же делителе и частном могут быть разные остатки. Прием деления, которым дети при этом пользуются, они переносят затем и на такие случаи деления, когда предметов нет налицо, т. е. когда делить приходится предметы воображаемые или отвлеченные числа.

Примеры на деление с остатком полезно располагать таким образом, чтобы отправляться при вычислениях либо от умножения, либо от деления без остатка. Вот образцы таких специально подобранных групп примеров:

а) 7×5	б) $32 : 8$	в) 15×5	г) $72 : 36$
$35 : 7$	$33 : 8$	$75 : 15$	$75 : 36$
$7 \times 5 + 2$	$35 : 8$	$15 \times 5 + 1$	$80 : 36$
$37 : 7$	$36 : 8$	$76 : 15$	$83 : 36$
$7 \times 5 + 4$	$37 : 8$	$15 \times 5 + 3$	$89 : 36$
$39 : 7$	$39 : 8$	$78 : 15$	$92 : 36$

Состав чисел первой сотни. Для того, чтобы производить вычисления с большими числами, дети должны знать таблицы арифметических действий. Однако, для достижения вычислительной беглости этого недостаточно. Надо еще владеть составом чисел первой сотни, т. е. уметь быстро и уверенно каждое число в пределе сотни составлять из различных пар слагаемых и из различных пар сомножителей. В результате многих упражнений у детей создается вычислительный аппарат, которым они будут пользоваться на дальнейших ступенях курса в области более крупных чисел.

Упражнения, которые предлагались детям до сих пор, были сгруппированы по действиям. Повторяя состав чисел, полезно сгруппировать их иначе — по *числам*. Приведем образцы упражнений, которые можно связать с изучением состава числа 36.

Сначала учитель предлагает детям составить число 36 из двух слагаемых, указав одно из них: какое число надо прибавить к 17-ти, чтобы получить 36? Или: к какому числу надо прибавить 18, чтобы получить 36? Дальше можно предложить детям составить число 36 из двух слагаемых, не указывая ни одного из них: составьте 36 из двузначного числа и однозначного. Составьте 36 из двух двузначных чисел.

Затем можно заняться составом числа 36 из сомножителей. Сколько раз надо взять по 2, чтобы получить 36? Какое число надо повторить 3 раза, чтобы получить 36? Сколько пар, троек, четверок, шестерок, девяток в числе 36?

Наконец, вопрос ставится в неопределенной форме: какие два числа надо перемножить, чтобы получить 36?

Полезно выявить состав числа не только из точных его делителей, но и из любых меньших чисел. Например, можно поставить такие вопросы: сколько пятерок, семерок, восьмерок в числе 36? Или: какими монетами можно уплатить 36 коп.?

Все эти упражнения можно закончить заданием выписать все числа, на которые делится число 36, а также решением примеров с *x*.[1]

$36 = 2 \times x$	$36 = 6 \times x$	$36 = 12 \times x$
$36 = 3 \times x$	$36 = 9 \times x$	$36 = 18 \times x$
$36 = 4 \times x$		

Измерение и черчение.

Измерение прямых линий и черчение их в уменьшенном виде. В начале второго года обучения дети продолжают измерения мерной веревкой, которыми они уже занимались в конце первого года обучения. Измеренные расстояния они чертят на клетчатой бумаге, принимая длину одной клетки за *единицу* измерения. Условие — длина одной клетки изображает 1 *м* (или в дальнейшем 10 *м*, 20 *м* и т. п.) они еще не называют масштабом, хотя и привыкают им пользоваться.

Сначала дети вычерчивают измеренные отрезки прямой. Затем можно перейти к черчению прямоугольника и квадрата. Измеряемые расстояния надо при этом выбирать с таким расчетом, чтобы они были выражены в целых метрах.

Простейшие диаграммы. На втором году дети впервые знакомятся с простейшими столбчатыми диаграммами, которые они вычерчивают по клетчатой бумаге, принимая высоту клетки вначале за *единицу* счета или измерения. Чтобы чертеж имел более внушительный вид, надо делать столбики шириною в две или даже три клетки. Такие столбики удобнее чертить и раскрашивать.

Знакомство с диаграммами можно начать с разъяснения диаграммы в учебнике, которая изображает недельное число уроков по предметам во II классе. Дальше можно перейти к черчению диаграмм. Числовые данные полезно при этом записать в табличку:

ПОГОДА В ОКТЯБРЕ.

Ясных дней…………13
Пасмурных дней……..8
Дождливых дней……10

[1] О решении примеров с *x* см. стр. 235.

Приступая к черчению, дети должны прежде всего провести „лежачую“ черту, на которой затем они намечают места столбиков. Необходимо, чтобы учитель точно указал, где именно должны они провести в тетради эту черту, сколько клеток отсчитать от края тетради, какой ширины сделать столбики и расстояния между ними и т. д. На втором году дети еще не могут сами предусмотреть все эти подробности. Когда расположение столбиков на диаграмме намечено, и учитель, обходя класс, проверил подготовительную работу учеников, можно перейти к черчению самих столбиков. Чертить следует, разумеется, по линейке, которой дети должны были научиться пользоваться еще в первом году обучения (см. стр. 98). Над чертежом делается общая надпись. Под каждым столбиком записывают, что именно он изображает. Иногда можно под диаграммой поместить *условные знаки*: обвести небольшие прямоугольники в 2-3 клетки для каждого, входящего в состав диаграммы, значения величины и раскрасить их в тот же цвет, которым раскрашены соответствующие столбики. Тогда уже нет надобности делать подписи под столбиками, так как необходимые объяснения записывают возле цветных прямоугольников.

Измерение времени. На первом году обучения дети научились измерять время с точностью до одного часа. О минутной стрелке им только известно, что в течение часа она делает полный оборот. Теперь дети должны научиться измерять время с точностью до одной минуты. Это можно сделать на модели часов, которую они сами изготовляют под руководством учителя.

По блюдечку дети обводят на бумаге и вырезывают круг. Этот круг они сгибают пополам и еще раз пополам. Развернув круг, они ставят в местах сгибов точки, которые делят окружность на 4 равные части. Каждую четверть они делят *наглаз* еще на 3 равные части. Таким образом круг окажется разделенным на 12 равных частей. Против каждого деления дети записывают часы: 1, 2, 3 и т. д. до 12 часов включительно. Такой бумажный циферблат наклеивают на толстую папку. Из картона делают 2 стрелки — одну подлиннее, другую покороче. Толстой ниткой или проволокой концы обеих стрелок прикрепляют к середине циферблата.

На доске перед классом учитель вывешивает большую модель часов, при помощи которой он направляет и проверяет работу детей. Меняя различным образом положение стрелок на классной модели часов, он предлагает детям называть время, которое они показывают. Затем, наоборот, учитель предлагает детям показать, как стоят обе стрелки в 12 час. ночи (или дня), в 9 час. утра (или вечера), в 4 часа дня (или ночи) и т. д.; как стоят обе стрелки в 9 ч. 15 м., в 9 ч. 30 м., в 9 ч. 45 м., и т. д. Одного из учащихся учитель вызывает к доске, остальные выполняют задание на своих местах.

Кроме обычного счета часов от полуночи до полудня и от полудня до полуночи, вводится также суточный отсчет времени от полуночи до следующей полуночи.

Чтобы разъяснить детям этот способ отсчета часов, надо прежде всего напомнить им, что началом суток считают 12 час. ночи, что от полуночи до полудня проходит 12 часов. Можно продолжить счет: до 1 часу пополудни от начала суток проходит 13 часов, до 2 час. Пополудни — 14 часов и т. д. При решении задач следует сопоставить вычислительные приемы при том и другом способе отсчета времени и выяснить преимущества второго способа.

На втором году дети узнают число и название месяцев в году, а также число дней в каждом месяце.

Деление круга, квадрата, прямоугольника и отрезка прямой. При знакомстве с половиной, четвертью и восьмой, учащиеся делят круг и квадрат на 2, на 4 и на 8 равных частей. Процесс деления геометрических фигур интересен не только как прием, поясняющий образование дроби, но и сам по себе, поскольку он выявляет некоторые особенности геометрических образов. Так, квадрат можно разделить пополам средней линией. Тогда каждая половина будет иметь форму прямоугольника. Но можно это сделать и при помощи диагонали. В таком случае половина будет иметь форму треугольника.[1]

При делении квадрата на 4 равные части получаются либо прямоугольники, либо треугольники, либо, наконец, квадраты же. Таким образом, могут быть случаи, когда часть от целого отличается только количественно. В других случаях разница не только количественная, но и качественная.

При делении квадрата на 8 равных частей можно воспользоваться двумя средними линиями и двумя диагоналями. При таком делении восьмая часть имеет форму треугольника. Но можно делить и иначе, и тогда каждая часть будет иметь форму прямоугольника.

Деление прямоугольника осуществляется так же, как и деление квадрата. Во всех этих случаях при проведении средней линии приходится делить сторону фигуры пополам. Это можно сделать непосредственно путем сгибания. В тех же случаях, когда это неудобно, дети производят деление наглаз. Так как на втором году обучения дети пользуются при черчении клетчатой бумагой, делению помогает подсчет клеток. Тех случаев, когда длина отрезка выражается неполным числом клеток, следует избегать. В остальных случаях при четном числе клеток середина отрезка как раз совпадает с одним из делений; при нечетном их числе делить пополам придется, в сущности, не весь отрезок, а длину *одной* клетки: при таком небольшом расстоянии деление наглаз осуществляется легко.

---

[1] Термины – средняя линия и диагональ детям не сообщаются.

При делении на 4 равные части надо пользоваться такими отрезками, по длине которых укладывается четное число клеток, при делении на 8 равных частей число клеток должно быть по меньшей мере кратным четырех. В этих случаях дети пользуются приемом последовательного деления. Так, чтобы разделить отрезок на 4 равные части, делят сначала пополам весь отрезок, а затем каждую полученную часть. При делении на 8 равных частей делят пополам весь отрезок, каждую половину и каждую четверть.

Во время занятий политехническим трудом у детей может явиться необходимость разделить пополам доску, кусок картона и т. п. Сгибать эти предметы нельзя, клеток на них не имеется. На случай такого деления можно познакомить детей с приемом, которым пользуются плотники. Сущность его заключается в следующем. Резделив отрезок прямой пополам наглаз, дети измеряют при помощи полоски бумаги расстояние от одного из его концов, например, левого, до намеченной середины. Затем от другого конца отрезка, в данном случае от правого, отмеривают по направлению к середине отрезка то же расстояние и делают на прямой вторую пометку. В отдельных случаях вторая пометка может совпасть с первой, но чаще случается, что пометки не совпадают. Тогда остается только разделить пополам расстояние между ними. Поскольку это расстояние очень невелико, деление не может затруднить учащихся.

Круг дети делят на 2, 4 и 8 равных частей исключительно путем сгибания. Часть круга всегда не только количественно, но и качественно отличается от целого. В этом особенность долей круга по сравнению с долями квадрата и прямоугольника. Части отрезка, наоборот, не могут качественно отличаться от целого отрезка: в этом случае разница может быть только количественной. Для формирования понятия о части важно, чтобы дети познакомились со всеми этими образами. Каждый из них в отдельности недостаточно полно характеризует данное понятие.

ПЕРВАЯ ТЫСЯЧА.

Цель и содержание концентра первой тысячи.

Целесообразность выделения первой тысячи в особый концентр. Выделение первой тысячи в особый концентр обусловлено следующими соображениями:

1. Одною из особенностей десятичной системы счисления является двойная группировка единиц: в разряды и классы. Единицы любого класса считают от одной до тысячи совершенно так же, как считают от одной до тысячи простые единицы. Все классы построены по образцу класса единиц. Подобно тому, как здесь мы имеем простые единицы, десятки и сот-

ни, так в классе тысяч мы встречаем единицы, десятки и сотни тысяч, в классе миллионов — единицы, десятки и сотни миллионов и т. д. Устная и письменная нумерация чисел любой величины сводится к нумерации трехзначных чисел, к нумерации первой тысячи. Отсюда целесообразность проработки первой тысячи, как особого концентра.

2. Действия над трехзначными числами представляют собою переход от устных вычислительных приемов к письменным. С одной стороны, на числа первой тысячи легко распространяются приемы выполнения действий, уже знакомые детям по работе над числами первой сотни. С другой стороны, в пределах тысячи является необходимость некоторой механизации вычислительных приемов, поскольку здесь уже имеется немало такого материала, который труден и утомителен для устных вычислений. Таким образом, тысяча является отправной точкой при разработке письменных вычислительных приемов. Это вторая причина, по которой следует выделить тысячу в особый концентр.

Устные и письменные вычисления. Изучая действия в пределах первой сотни, дети производят все вычисления устно. Возникает вопрос, следует ли при изучении тысячи знакомить детей с письменными механизмами действий или целесообразнее ограничиться на втором году обучения только устными вычислениями. Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо прежде всего установить точнее разницу между устными и письменными вычислениями.

Прежде всего необходимо подчеркнуть, что наличие записи не является отличительным признаком письменных вычислений. Можно записывать не только конечный результат, но и некоторые промежуточные этапы, и тем не менее по существу самые вычисления будут устными. И обратно, если мы ничего не записываем, но, например, деля 171 на 9, мысленно проводим черту, отделяем 2 цифры, ставим 9 под числом 17, находим остаток 8, сносим единицу и делим 81 на 9, то, несмотря на отсутствие записи, мы не имеем права называть эти вычисления устными.

Разница между устными и письменными вычислениями заключается в том, что в первом случае мы вычисляем по „свободному соображению“, подбирая приемы, удобные для данного конкретного случая, индивидуализируем, так сказать, вычисления; во втором случае пользуемся готовым правилом, трафаретом.

Так, складывая устно 236 и 54, можно поступить следующим образом: 30 + 50 = 80; 200 + 80 = 280; 6 + 4 = 10; 280 + 10 = 290. Но можно сделать иначе: 236 + 4 = 240; 240 + 50 = 290. Или еще иначе: 36 + 54 = 90; 200 + 90 = 290 и т. д. Письменное же сложение делается всегда по одному и тому же правилу, почти автоматически, при помощи таблиц. Складывая числа 236 и 54,

мы подписываем их одно под другим; затем, сложив единицы, пишем в ответе 0, а десяток относим к десяткам и т. д.

Как мы, видим, вычисляя устно, ученик должен все время рассуждать, отчетливо представляя себе числа, их десятичный состав. В этом случае имеет место творческий процесс, связанный с постепенным усвоением основных математических понятий, называемых законами арифметических действий. При письменных же вычислениях приходится иметь дело не столько с действиями над числами, сколько с механическими операциями над цифрами.

С внешней стороны разница между устными и письменными вычислениями заключается в том, что при устных вычислениях начинают действия с высших разрядов, данные и результат записывают „в строчку“. При письменных вычислениях действия начинают чаще всего с низших разрядов, данные и полученные числа пишут „в столбик“. Вычисляя устно, полученные числа записывают сразу, целиком, после того, как закончат вычисления. Производя действия письменно, ведут запись попутно с вычислениями, по разрядам.

Ни в коем случае не следует торопиться с введением в курс арифметики письменных механизмов действий. Слишком поспешный переход к письменным вычислительным приемам наносит учащимся большой вред: автоматически усвоив механизмы действий, они затем в течение всего курса начальной школы производят эти действия вне контроля сознания. На этой почве появляются ошибки и притом ошибки явно нелепые, с которыми очень трудно бороться.

Итак, на первом и втором году обучения все вычисления выполняются устно. Мало того, необходимо и в дальнейшем уделять устным вычислениям должное внимание. Надо помнить, что дети приобретают понимание арифметических действий и их законов только лишь в процессе устных вычислений.

Содержание концентра первой тысячи на втором году обучения. Теперь мы уже можем указать в общих чертах содержание концентра первой тысячи: на втором году обучения изучается только та часть материала этого концентра, которая наиболее подходит для устных вычислений. Сюда относятся, кроме устной и письменной нумерации только лишь устное сложение и вычитание.

Особенностью занятий в этом концентре, по сравнению с концентром первой сотни, является его большая отвлеченность. До сих пор все вычисления легко было сделать наглядными. Это обстоятельство, в связи с узостью числовой области первой сотни, делало возможным запоминание наизусть результатов всех табличных, а отчасти и внетабличных вычислений. В концентре тысячи, при его значительно большей ширине, таких опорных пунктов относительно гораздо меньше, так как числа этой области изучать труднее, а различных числовых комбинаций здесь несравненно больше. Поэтому при

изучении тысячи приходится прежде всего заниматься изучением различных методов вычисления. А вместе с тем углубляются и уточняются основные понятия арифметических действий, которые лежат в основе всех этих вычислительных приемов и с которыми дети уже встречались на предшествующих ступенях изучения арифметики.

Нумерация первой тысячи.

Устная нумерация. Дети уже знают, что один десяток заключает 10 единиц, а сотня — 10 десятков. Но им еще не ясна роль сотни, как сложной счетной единицы. Роль эта выясняется при счете круглыми сотнями в пределах 1000. Из этого, однако, не следует, что нумерацию тысячи надо начинать со счета круглыми сотнями. Подобно круглым десяткам, круглые сотни будут непонятны детям, если их взять вне натурального числового ряда. Вот почему надо сначала научить детей считать до тысячи по одному, а уже затем перейти к счету круглыми сотнями.

Пересчитывание или связывание в пучки спичек или палочек при счете до 1000 уже становится затруднительным. Однако дети еще нуждаются в это время в конкретизации новых понятий. В частности необходимо, чтобы понятие о тысяче связывалось с таким наглядным образом, который раскрывал бы состав тысячи не только из сотен, но одновременно с этим из десятков и единиц. Таким пособием является лента длиною в 10 *м*, разделенная на метры, дециметры и сантиметры. Каждый сантиметр представляет единицу, дециметр — десяток и метр — сотню. Такую „ленту тысячи“ дети могут сами склеить из миллиметровой бумаги, раскрасив соответствующим образом квадратные сантиметры, из которых она составлена. Лента прикрепляется вдоль стен класса и прежде всего поражает детей своей длиною. Таким образом разница между сотней и тысячей становится с этой стороны вполне ясной, осязательной.

Изучение устной нумерации можно вести следующим образом.

1. С ч е т д о 1 0 0 0 и в ы д е л е н и е к р у г л ы х с о т е н. На ленте дети считают до 1000. Первую сотню нет надобности пересчитывать по одному. Показав на ленте *сто*, дети продолжают некоторое время считать по одному, пока не обнаружится, что принцип образования трехзначных чисел в пределах второй сотни они уловили. Тогда можно считать десятками: сто тридцать, сто сорок и т. д. до ста девяноста. Последние числа второй сотни они опять называют подряд, пока не дойдут до числа 199. Показывают на ленте следующий сантиметр и устанавливают, что набралась полная сотня, а всего *две сотни* или *двести*. Усвоив слово двести, они продолжают счет сначала подряд, затем

с пропусками, к концу третьей сотни снова подряд, пока не наберется *три сотни* или *триста*. Таким образом дети продолжают считать, пока не дойдут до 10 сотен, о которых они должны знать, что они составляют *одну тысячу*.

Чтобы закрепить понятие о сотне, как о счетной единице, можно еще несколько раз предложить детям считать круглыми сотнями до 1000, уже не называя промежуточных чисел. При этом они раздробляют круглые сотни в единицы и, обратно, составляют из единиц круглые сотни.

2. Изучение десятичного состава трехзначных чисел. Эти упражнения можно разбить на 2 группы: а) образование трехзначного числа из сотен, десятков и единиц, и б) разложение трехзначного числа на сотни, десятки и единицы. Первая группа связана с *раздроблением* сотен в десятки и единицы, вторая группа — с *превращением* единиц и десятков в сотни.

Учитель предлагает одному из учащихся показать на „ленте тысячи" 2 сотни и 6 десятков.

Вопросы:	*Ответы:*
а) Как назвать иначе 2 сотни?	Двести.
б) Как назвать иначе 6 десятков?	Шестьдесят.
в) Как назвать все число?	Двести шестьдесят.

Поупражнявшись в назывании чисел, состоящих из сотен и десятков, дети переходят к упражнениям с любыми трехзначными числами. Учитель называет единицы каждого разряда. Учащиеся называют все число, показав его предварительно на ленте. Полезно при этом сопоставлять такие числа, как триста пять и триста пятьдесят, триста пять и пятьсот три, триста пятьдесят и пятьсот тридцать, пятьсот тридцать и пятьсот три и т. д.

Обратное упражнение заключается в том, что учитель называет числа общеупотребительными названиями: двести тридцать, четыреста восемьдесят, триста пятьдесят четыре, шестьсот семь и т. д. Учащиеся показывают каждое число на ленте и говорят при этом, сколько в нем сотен, десятков и единиц.

3. Отвлеченный счет до 1000. При отвлеченном счете необходимо с особенным вниманием отнестись к случаям *перехода через полные сотни* когда дети, вместо того, чтобы сказать „триста", говорят „двести девяносто десять" или вместо того, чтобы сказать „пятьсот", говорят „четыреста сто" и т. д. Учащиеся должны ясно представлять себе место каждого числа, в частности и круглых сотен, в натуральном числовом ряду. Они должны уметь назвать число, предшествующее данному, непосредственно следующее за данным, стоящее между двумя данными и т. п. Если бы обнаружилось, что на некоторые вопросы этого рода детям еще трудно отвечать, необходимо снова обратиться к „ленте тысячи" или другим наглядным пособиям.

Письменная нумерация. Если дети умеют составить трехзначное число из сотен, десятков и единиц и, обратно, разложить трехзначное число на сотни, десятки и единицы, то запись и чтение таких чисел уже не должны особенно их затруднить. При изучении письменной нумерации трехзначных чисел дети должны понять, что единицы пишут на первом месте справа, десятки на втором месте, сотни на третьем месте; чтобы обозначить одну тысячу, пишут единицу на четвертом месте. Для пояснения этого правила можно воспользоваться счетной табличкой.

Прежде всего учащиеся должны познакомиться с условным обозначением чисел при помощи счетной таблицы и кружков. Учитель предлагает в первом столбце с надписью „единицы“ отложить 1, 2, 3 и т. д. кружков. Когда наберется 10 кружков, учитель объясняет детям, что вместо этих 10 кружков, лежащих в первом столбце, достаточно положить 1 кружок во втором столбце с надписью „десятки“.

Тысячи	Сотни	Десятки	Единицы

Затем дети откладывают во втором столбце кружки по одному, называя числа двадцать, тридцать и т. д., пока не наберется 10 десятков. Десять кружков во втором столбце дети заменяют одним кружком в третьем столбце. Этот 1 кружок обозначает 10 десятков или 1 сотню.

Таким же образом дети набирают 10 кружков в третьем столбце, называя числа двести, триста и т. д., пока не наберется 10 сотен. Одним кружком в четвертом столбце они заменяют 10 кружков в третьем, обозначая тем самым 10 сотен или 1 тысячу.

После этого можно перейти к *записи* круглых сотен, а затем и любых чисел в пределах тысячи. Сначала учитель называет числа по *разрядам*, например: 5 сотен, 3 сотни, 7 сотен; или 2 сотни 3 десятка 6 единиц; или 4 сотни 5 десятков; или, наконец, 6 сотен 8 единиц. Учащиеся изображают эти числа при помощи кружков на счетной таблице, а затем пишут их цифрами у себя в тетради. При отсутствии единиц какого-нибудь разряда, на таблице остается пустым соответствующий столбец, а в записи появляется нуль. Записанное таким образом число дети называют общепринятым образом: пятьсот, триста, семьсот; или двести тридцать шесть; или четыреста пятьдесят; или, наконец, шестьсот восемь.

После этого можно диктовать детям числа и не по разрядам, сразу называя все число. Дети должны разложить это число на сотни, десятки и единицы, обозначить число единиц каждого разряда на счетной таблице и записать это число у себя в тетрадях.

Последняя группа упражнений — запись чисел под диктовку учителя без помощи счетной таблицы прямо на доске или в тетрадях.

Усваивая запись чисел, дети вместе с тем приобретают навык их *чтения*. Чтобы прочитать трехзначное число, надо уметь объяснить значение каждой цифры, которое зависит от занимаемого ею места. Пусть надо прочитать число 268. Дети дают следующие объяснения: цифра 2 стоит на третьем месте и обозначает 2 сотни, т.е. двести; цифра 6 стоит на втором месте и обозначает 6 десятков, т.е. шестьдесят; цифра 8 стоит на первом месте и обозначает единицы. Все число читаем так: двести шестьдесят восемь.

Чтобы дети лучше поняли роль нуля при записи и чтении чисел, полезно сопоставлять запись таких чисел, как 2, 20 и 200 или 305, 35 и 350 и т. д.

Выделение круглых десятков. Заканчивая изучение нумерации первой тысячи, надо научить детей отвечать на вопрос: сколько всего десятков в данном числе? На втором году вопрос этот ставится только по отношению к круглым сотням и к числам, состоящим из сотен и десятков. Обратно — двузначное число десятков дети должны уметь раздробить в единицы. Оба эти вопроса, как мы увидим, будут постоянно возникать перед нами при последующих вычислениях в пределах 1000. Необходимо вовремя подготовить к ним детей.

Чтобы учащиеся могли ответить на вопрос, сколько всего десятков в числе 300, надо научить их рассуждать следующим образом: 300 — это 3 сотни. В сотне 10 десятков, в трех сотнях — 30 десятков. Значит в числе 300 всего 30 десятков. В случае каких-либо затруднений полезно обратиться к ленте тысячи, найти на ней число 300 и воочию убедиться, что в этом числе 30 десятков.

Наряду с прямым вопросом полезно тут же поставить обратный вопрос: сколько единиц в 30 десятках? Очевидно, преобразовав только что 300 единиц в 30 десятков, дети сумеют выполнить и обратную операцию: преобразовать 30 десятков в единицы. Если бы они сразу не могли ответить на поставленный вопрос, пришлось бы снова обратиться к помощи наглядного пособия. На ленте тысячи не трудно отсчитать 30 десятков и непосредственно убедиться, что они составляют 3 сотни или 300 единиц.

После упражнений с круглыми сотнями можно перейти к числам, состоящим из сотен и десятков. Чтобы ответить на вопрос, сколько всего десятков в числе 570, рассуждаем так: 570 состоит из 5 сотен и 7 десятков; 5 сотен — это 50 десятков; 50 десятков да 7 десятков — всего 57 десятков. Значит число 570 содержит 57 десятков. Рассуждая, дети могут смотреть на ленту тысячи, на которой они будут ясно видеть 5 сотен, состоящих из 50 десятков и еще 7 десятков, а всего 57 десятков.

Решая обратный вопрос — сколько единиц в 57 десятках, дети рассуждают так: 57 десятков — это 50 десятков и 7 десятков; 50 десятков — это 5 сотен или 500, а 7 десятков — это 70. Значит 57 десятков составляют 570 единиц.

В случае надобности, учитель помогает детям наводящими вопросами и поясняет процесс раздробления десятков в единицы на ленте тысячи.

Сложение и вычитание в пределах тысячи.

Общие замечания. Подобно тому как в пределах сотни мы различали сложение и вычитание без перехода и с переходом через десяток, так в пределах тысячи при устных вычислениях мы различаем *сложение и вычитание без перехода и с переходом через сотню.*

К сложению без перехода через сотню относятся те случаи, когда сумма единиц и десятков данных чисел не *превышает ста.* В этой группе мы различаем более легкие случаи, когда сумма единиц и десятков *меньше* ста, и более трудные случаи, когда при сложении единиц и десятков получается целая сотня. К сложению с переходом через сотню относятся те случаи, когда сумма десятков и единиц данных чисел *превышает сто.*

Вычитание изучается в тесной связи со сложением: параллельно с упражнениями в сложении даются соответствующие упражнения в вычитании.

Пока дети занимаются устными вычислениями, не следует применять в качестве наглядного пособия для изучения действий счетную таблицу. Мы имеем в виду ту таблицу, разделенную на четыре столбца, которой мы пользовались при изучении нумерации. Дело в том, что вычислительные приемы, которые можно показать на этой таблице, по существу являются *письменными* приемами. Такова была роль счетной таблицы-абака и в истории математики: абак содействовал возникновению письменных механизмов действий, мы же хотим пока вести детей по пути устных вычислений.

Если, таким образом, отказаться от счетной таблицы, то при изучении устного сложения и вычитания в пределах тысячи можно поступить, в зависимости от развития учащихся, двояко: с сильным классом, хорошо овладевшим сотней, — обходиться без наглядного пособия, а с более слабым классом, как это ни хлопотливо, — пользоваться пучками спичек и палочек, связанных в десятки и сотни. Приемы применения этого пособия те же, что и при изучении сотни.

Последовательность в изучении сложения и вычитания. Начать изучение сложения и вычитания в пределах 1000 следует с тех случаев, когда сложение сводится к составлению искомого числа из разрядных слагаемых, а вычитание — к разложению на разрядные слагаемые данного числа. Эти случаи тесно примыкают к нумерации и особых пояснений не требуют. Вот образцы таких упражнений:

а) 200 + 40	б) 300 + 5	в) 540 + 9	г) 200 + 45
420 − 20	407 − 7	354 − 4	562 − 62

К таким наиболее легким случаям сложения и вычитания относятся также сложение и вычитание круглых сотен, которые основаны на сложении и вычитании в пределах 10 и на умении превратить единицы в сотни и раздробить сотни в единицы. Так, умея сложить 3 да 4, учащиеся с легкостью выполнят сложение чисел 300 и 400. То же относится и к вычитанию.

Далее, можно научить детей прибавлять *без перехода через сотню в более легких случаях* круглые десятки и круглые сотни к любым числам в пределах тысячи. Параллельно изучаются соответствующие случаи вычитания. Расположить упражнения можно в такой последовательности:

1) 340 + 50 580 − 30	2) 326 + 30 345 − 20	3) 308 + 60 457 − 50
4) 260 + 300 480 − 200	5) 375 + 200 849 − 300	6) 406 + 300 704 − 500

Следующую группу упражнений составляют в с е с л у ч а и с л о ж е н и я и в ы ч и т а н и я к р у г л ы х ч и с е л, которые еще не вошли в предшествующие группы упражнений, а именно:

а) Без перехода через сотню:

1) 240 + 130 680 − 250	2) 160 + 40 400 − 50	3) 380 + 120 700 − 240

б) С переходом через сотню

1) 80 + 60 120 − 50	2) 360 + 70 720 − 60	3) 250 + 180 420 − 150

Последнюю группу упражнений составляет *сложение без перехода через сотню* (легкие случаи) трехзначного числа с *однозначным* и *с двузначным*. Попутно прорабатываются соответствующие случаи вычитания.

Материал можно расположить в такой последовательности:

1) 123 + 5 256 − 8	2) 209 + 7 316 − 9	3) 120 + 42 364 − 24	4) 105 + 28 237 − 30	5) 136 + 26 432 − 28

Все остальные, более трудные случаи сложения и вычитания в пределах тысячи следует отложить до третьего года обучения, когда дети переходят к изучению письменных вычислительных приемов.

Вычислительные приемы. Чтобы дети усвоили без труда тот или иной вычислительный прием, необходимо прежде всего располагать упражнения в порядке возрастающей трудности. Например, чтобы сложить числа 340 и 250 или от числа 480 отнять 130, надо уметь отнести десятки одного числа к десяткам другого и сотни одного к сотням другого. Ученик научится это

делать, если будет решать такие примеры: 1) 40 + 50, 340 + 50, 340 + 250; 2) 80 − 30, 480 − 30, 480 − 130.

На таких группах специально подобранных примеров учащиеся поймут, что сложить 340 и 250 можно следующим образом: 300 + 200 = 500; 40 + 50 = 90; 500 + 90 = 590. Короче 340 + 200 = 540; 540 + 50 = 590.

Точно также, чтобы от числа 480 отнять 130, можно поступать так: 400 − 100 = 300; 80 – 30 = 50; 300 + 50 = 350. Или короче: 480 – 100 = 380; 380 – 30 = 350.

К решению таких примеров на сложение, как 260 + 140 и 280 + 150, а также таких примеров на вычитание, как 500 − 120 и 430 − 160, можно подготовить детей следующими упражнениями:

1) 60 + 40	2) 100 − 20	3) 80 + 50	4) 130 − 60
260 + 40	500 – 20	280 + 50	430 − 60
260 + 140	500 − 120	280 + 150	430 − 60

Чтобы сложить 260 и 140, дети будут поступать таким образом: 200 + 100 = 300; 60 + 40 = 100; 300 + 100 = 400. Короче: 260 + 100 = 360; 360 + 40 = 400.

При вычитании (500 − 120) делают так: 500 – 100 = 400; 400 − 20 = 380. Отнимая 20 от числа 400, дети должны понимать, что отнимают 20 от одной сотни, а 3 сотни при этом не трогают.

Чтобы сложить 280 и 150, надо раньше научиться складывать 80 и 50. Чтобы от 430 отнять 160, надо уметь от 130 отнять 60. Эти случаи сложения и вычитания тоже удобно проработать на группах аналогичных примеров: 1) 80 + 20, 80 + 30, 80 + 50; 2) 130 − 30, 130 − 40, 130 − 60.

Эти же примеры можно решать иначе: 8 десятков да 5 десятков — будет 13 десятков; 13 десятков — это 130; значит 80 + 50 = 130. То же при вычитании: от 13 десятков отнять 6 десятков — будет 7 десятков, т. е. 70. Значит 130 − 60 = 70.

Числа 280 и 50 складываем так: 80 + 50 = 130; 200 + 130 = 330. Другой способ: 28 десятков да 5 десятков — будет 33 десятка, т. е. 330.

От 430 отнимаем 60 следующим образом: 430 − 30 = 400; 400 − 30 = 370. Можно также от 43 десятков отнять 6 десятков — будет 37 десятков, т. е. 370.

Чтобы сложить 280 и 150, поступаем так: 200 + 100 = 300; 80 + 50 = 130; 300 + 130 = 430. Другой прием: 28 десятков да 15 десятков — будет 43 десятка, т. е. 430.

Разность 430 − 160 вычисляем так: 430 − 100 = 330; 330 − 30 = 300; 300 − 30 = 270. Иначе: 43 десятка без 16 десятков — будет 27 десятков, т. е. 270.

Остановимся на сложении трехзначного числа с двузначным и на соответствующем случае вычитания, например: 238 + 27 и 462 − 35.

Складывая 238 и 27, мы производим действие над десятками и единицами, не трогая сотен. Десятки второго слагаемого мы должны отнести к десяткам первого слагаемого, а затем прибавить единицы. Будем иметь: 238 + 20 = 258; 258 + 7 = 265.

При вычитании применяем аналогичный прием:
462 − 30 = 432; 432 − 5 = 427. Можно также воспользоваться приемом уравнения единиц: 462 − 32 = 430; 430 − 3 = 427.

ЗАДАЧИ НА ВТОРОМ ГОДУ ОБУЧЕНИЯ.

Общие указания. Уменье решать задачи дети приобретают не без труда. Нередко на третьем и даже на четвертом году обучения они не могут справиться самостоятельно с обыкновенной задачей в 2 — 3 действия. Это объясняется тем, что в свое время, на первом и втором годах обучения эта сторона работы оставалась в пренебрежении.

Преподавателю второго класса мы настойчиво рекомендуем проверить, как велась работа в первом классе, выполнены ли те методические требования, которые относятся к решению задач на первом году обучения (см. стр. 146). Только закрепив все намеченные методические позиции, можно двигаться вперед, не боясь встретить на своем пути неожиданные и непреодолимые препятствия.

Решение задачи в три действия. Особенностью второго года обучения по сравнению с первым являются задачи в три действия. Покажем на примере, как решать такого рода задачи.

Предлагая детям задачу, учитель должен говорить внятно, неторопливо, подчеркивая слова, которые надо запомнить:

Купили *8 листов* белой бумаги и *9 листов* цветной *за 86 коп*. Один лист белой бумаги стоит *4 коп*. *Сколько стоит один лист цветной бумаги?*

Сообщая задачу, учитель попутно выписывает на доске числовые данные. Глядя на запись один из учеников повторяет задачу. Затем дети выделяют вопрос задачи и устанавливают, что сразу на него ответить нельзя.

Что же можно узнать сразу? спрашивает учитель. Ученики вдумываются в задачу и перебирают мысленно данные, сопоставляя их попарно: 8 листов и 9 листов, 9 листов и 86 коп., 8 листов и 4 коп. и т. д. Некоторые комбинации они тотчас отбрасывают, как явно бесплодные, например, 8 листов и 9 листов или 9 листов и 86 коп. Но такая пара чисел, как 8 листов и 4 коп. привлекает к себе их внимание: на основании этих чисел можно узнать, сколько стоит вся белая бумага. Это позволит нам в дальнейшем узнать стоимость всей цветной бумаги и цену одного такого листа.

Такими соображениями, которые пробегают в голове ученика весьма быстро и не всегда в строго расчлененной форме, он наталкивается на верный ход решения задачи.

Наводящими вопросами учитель помогает детям понять содержание задачи и выделить полезные числовые комбинации: что известно в задаче о белой бумаге, что можно узнать? Что говорится о цветной бумаге, что известно, что неизвестно? и т. д.

Решая задачу, дети ставят вопросы устно. Лишь во втором полугодии можно их иногда записывать. Решение каждого вопроса, наоборот, непременно надо записывать, так как внимание учащихся должно быть прежде всего направлено на выбор действия. Действия следует нумеровать, при числах писать наименование по правилам, указанным для первого года обучения. В конце задачи надо коротко записать ответ.

Чтобы подвести учащихся к решению сложной задачи, можно воспользоваться приемом постепенного усложнения простой задачи. Вот образец такой группы задач:

1) На 86 коп. купили белой и цветной бумаги. За белую бумагу заплатили 32 коп. Сколько стоит цветная бумага?

2) На 86 коп. купили белой бумаги и 9 листов цветной. За белую бумагу заплатили 32 коп. Сколько стоит один лист цветной бумаги?

3) На 86 коп. купили 8 листов белой бумаги и 9 листов цветной. Лист белой бумаги стоит 4 коп. Сколько стоит один лист цветной бумаги?

Виды задач на втором году обучения. Задачи, которые дети решают на втором году обучения, являются отчасти повторением уже известных им видов задач, отчасти же представляют новые комбинации, связанные с появлением новых понятий (разностное сравнение, увеличение и уменьшение во столько-то раз, кратное сравнение) и с усложнением задач (задачи в 3 и даже 4 действия). Некоторые из этих новых комбинаций можно отнести к категории так называемых типовых задач. Отдельную группу составляют задачи на время, — они имеют некоторые своеобразные особенности, требующие специального методического подхода. В соответствии с этим рассмотрим подробнее следующие группы задач: 1) задачи, в которых употребляются выражения *больше и меньше на столько-то и во столько-то раз*; 2) типовые задачи и 3) задачи на время.

Задачи с выражениями „больше и меньше на столько-то и во столько-то раз“. При изучении сложения и вычитания в пределах 100 дети решают задачи, в которых встречаются выражения *больше и меньше на столько-то*. Новыми по сравнению с первым годом являются прежде всего „трудные“ задачи, в которых сложение задано в терминах вычитания, а вычитание — в терминах сложения.

Чтобы облегчить детям решение этих задач, надо научить их изменять формулировку таким образом, чтобы действие было выражено в собственных терминах. Пусть, например, дана задача:

В колхозном стаде 95 коров, на 37 коров больше, чем в прошлом году. Сколько коров было в прошлом году?

Учитель помогает детям наводящими вопросами изменить эту задачу.

Вопросы:	*Ответы:*
а) Сколько коров в колхозном стаде в этом году?	95 коров.
б) Что известно о числе коров в прошлом году?	Что их было тогда меньше, чем в этом году
в) На сколько меньше?	На 37 коров меньше.

После этого дети повторяют задачу в новой формулировке:

В этом году в колхозном стаде 95 коров, в прошлом году было меньше на 37 коров. Сколько коров было в прошлом году в колхозном стаде?

Новыми по сравнению с первым годом являются также задачи на разностное сравнение. В эти задачи следует ввести наряду с вопросами: на сколько больше, на сколько меньше и вопросы: на сколько длиннее, короче, выше, ниже, тяжелее, легче и т. п. При решении задач в два и три действия разностное сравнение обычно занимает последнее место. Гораздо реже оно стоит на первом месте. Вот образец задачи, которая начинается с разностного сравнения:

Ударница насыпает в час 60 коробок синьки, неударница — 54 коробки. На сколько больше коробок синьки насыпает ударница в семичасовый рабочий день?

Если задача заканчивается разностным сравнением, начало ее обычно строится симметрично, так как сравнивать целесообразно только аналогичные вещи. Вот образцы таких задач:

1. Два сложения и разностное сравнение:

В одной коробке было 37 перьев, в другой 49 перьев. В первую коробку положили еще 34 пера, а во вторую 19. В которой коробке теперь больше перьев и на сколько?

2. Два вычитания и разностное сравнение:

В одном бидоне было 38 *л* молока, в другом 47 *л.* Из первого бидона взяли 12 *л*, из второго 29 *л*. В котором из бидонов осталось меньше молока и на сколько меньше?

3. Два умножения и разностное сравнение:

Блокнот стоит 9 коп., лист бумаги 4 коп. Что и на сколько дороже: 2 блокнота или 4 листа бумаги?

4. Два деления и разностное сравнение:

Хорошая корова в 4 дня дала 60 *л* молока, а средняя корова в 6 дней 54 *л*. На сколько литров дневной удой хорошей коровы выше дневного удоя средней коровы?

Задачи на увеличение числа в несколько раз даются детям впервые во время изучения табличного умножения. Среди них особенного внимания заслуживают те задачи, в которых наряду с увеличением в несколько раз имеется увеличение на несколько единиц. Вот образец такой задачи:

Дети сделали 8 зеленых флажков, синих флажков на 4 больше, чем зеленых, а красных в 4 раза больше, чем зеленых. Сколько всего флажков сделали дети?

Задачи на уменьшение числа в несколько раз даются впервые в связи с изучением деления на равные части. И в этом случае интересны задачи на сопоставление выражений: меньше *на* столько-то и меньше во столько-то раз. Например:

Купили глянцевой бумаги 21 лист, альбомной — на 3 листа меньше, а белой бумаги в 3 раза меньше, чем глянцевой. Сколько всего бумаги купили?

О задачах на кратное сравнение можно сказать примерно то же, что и о задачах на разностное сравнение. Приведем образцы наиболее характерных задач в три действия на кратное сравнение:

1. Два умножения и кратное сравнение:

Что стоит больше и во сколько раз: 4 тетради по 24 копейки или 8 карандашей по 6 копеек?

2. Два деления и кратное сравнение:

Прачка может выстирать 24 *кг* белья в 8 часов, а стиральная машина — 96 *кг* в 2 часа. Во сколько раз больше белья выстирает в один час машина, чем прачка?

Интересны задачи, в которых наряду с кратным сравнением употребляются выражения: на столько то больше или меньше? Например:

Посадили 6 мешков картофеля. Собрали с одного участка 36 мешков, а с другого на 12 мешков меньше. Во сколько раз собрали картофеля больше, чем посадили?

Типовые задачи. К этой категории задач на втором году обучения мы относим не столько общеизвестные типовые задачи (см. стр. 362), которые большею частью еще трудны для учащихся этого класса, сколько некоторые виды задач, которые можно считать типичными, характерными для данного концентра.

Вот те задачи, приближающиеся к типовым или типовые, которые дети могут решать при изучении первой сотни:

1. Умножение, вычитание и деление по содержанию:

Спорткружок купил за 86 руб. несколько пар лыж, по 9 руб. за пару, и 4 пары коньков, по 8 руб. за пару. Сколько пар лыж купил спорткружок?

2. Умножение, вычитание и деление на равные части:

Из 69 *м* материи сделали 9 халатов и 8 фартуков. На каждый фартук пошло по 3 *м* материи. Сколько метров пошло на каждый халат?

3. Способ приведения к единице:

За 6 стульев заплатили 54 руб. Сколько стоят 8 стульев?

4. Способ обратного приведения к единице.

Десяток пуговиц стоит 70 коп. Сколько таких пуговиц можно купить на 56 коп?

5. Способ отношений:

4 круглых хлеба весят 6 *кг*. В кооператив привезли 36 таких хлебов. Сколько все они весят?

6. Вычисление части числа:

На покупку вещей рабочий взял из сберкассы 72 руб. Третью часть этих денег он истратил на ботинки, восьмую часть на рубашку. Сколько денег у него осталось?

7. Задачи, подготовительные к вычислению слагаемых по их сумме и разности:

В школе в трех классах 95 учащихся. Двух учеников перевели в другую школу. Тогда во всех трех классах ребят стало поровну. Сколько теперь ребят в каждом классе?

Приемы решения этих задач ничем не отличаются от приемов решения обыкновенной сложной задачи. Было бы совершенно неправильно приучать детей к шаблону, механизировать способы решения. Иногда полезно прибегнуть к схематической записи задачи. Так, например, данные к первой задаче можно записать таким образом:

За 86 руб. купили: несколько пар лыж по 9 руб.
4 пары коньков по 8 руб.
Сколько купили лыж?

Некоторые из указанных видов задач полезно пояснить на дидактическом материале. Поэтому для начала следует подобрать задачу с небольшими числами, по возможности в пределах второго десятка. Например, прежде чем решать пятую задачу, можно задать детям такой вопрос: 4 круглых хлеба весят 6 *кг*; сколько весят 12 таких хлебов?

Возьмем вместо хлебов 12 кружков. Разложим их на кучки, по 4 кружка в каждой кучке. В задаче сказано, что каждые 4 хлеба весят 6 *кг*.

Благодаря такой подготовке дети яснее представят себе содержание задачи и соотношение входящих в нее величин. Теперь им уже не трудно будет сооб-

разить, что сначала надо разделить 12 хлебов по 4, а затем 6 *кг* повторить столько раз, сколько раз 4 хлеба содержится в 12 хлебах.

Решив задачу с небольшими числами на дидактическом материале, дети легче решат такую же задачу с большими числами по представлению.

Задачи на время. На втором году дети чаще всего решают такие задачи на время, которые не выходят за пределы суток. При решении этих задач необходимо пользоваться в качестве наглядного пособия моделью часов (см. стр. 218).

Укажем два вида этих задач, которые доступны учащимся на втором году обучения.

1. Известно начало и конец события, вычислить его продолжительность:

Трамвайное движение началось в 6 час. 18 мин. утра и закончилось в 2 час. 15 мин. ночи. Сколько времени продолжалось трамвайное движение?

Глядя на часы, дети рассуждают так. До 7 час. утра прошло 42 мин.; до полудня — еще 5 час.; от полудня до полуночи — 12 час.; после полуночи — 2 ч. 15 мин. Сложим все эти числа, соединяя вместе сначала часы, затем минуты:

42 м. + 5 ч. + 12 ч. + 2 ч. 15 м. = 19 ч. 57 м.

2. Известно начало события и его продолжительность, вычислить время его окончания:

Мать отнесла ребенка в очаг в 6 ч. 45 м. утра и взяла его обратно через 8 час. В котором часу взяла она ребенка из очага?

Дети рассуждают так. От начала суток прошло 6 час. 45 м. да еще 8 ч. Узнаем, сколько всего часов прошло от начала суток.

6 ч. 45 м. + 8 ч. = 14 ч. 45 м.

От начала суток до полудня прошло 12 час. Узнаем, сколько часов прошло после полудня.

14 ч. 45 м. − 12 ч. = 2 ч. 45 м.

Ответ: в 2 ч. 45 м. пополудни.

ПРИМЕРЫ НА ВТОРОМ ГОДУ ОБУЧЕНИЯ.

Примеры, которые дети решают на втором году обучения, не представляют собою чего-либо существенно нового по сравнению с первым годом обучения. Единственная группа примеров, которая требует особых замечаний, — это примеры с x. На первом году неизвестное обозначается при

помощи вопросительного знака, и дети решают эти примеры без вычислений, на основании знания состава чисел. На втором году, решая эти примеры, дети начинают выявлять то действие, которым данный пример решается.

Сначала учитель должен в примерах с вопросительным знаком заменить знак вопроса новым значком — буквой икс. Учитель пишет на доске пример: 26 + ? = 40. Пример этот дети читают так: какое число надо прибавить к 26-ти, чтобы получить 40. Учитель говорит: вместо знака вопроса можно поставить другой знак — букву икс, которая пишется как русское *ха*. Затем он записывает на доске тот же пример, но уже не с вопросительным знаком, а с буквой икс: $26 + x = 40$, и предлагает детям прочитать его. Дети читают этот пример так же как и раньше и решают его пока добавлением 26-ти до 40, а именно: 26 да 4 — тридцать, да еще 10 — сорок; 26 да 14 будет 40. Запись они делают тоже по прежнему: 26 + 14 = 40, причем подчеркивают число, которое было неизвестно, а теперь написано вместо знака вопроса. Итак, число 14 было неизвестно. Чтобы решить пример, мы должны были узнать неизвестное число. Это *неизвестное число мы обозначили буквой.*

Поскольку в пределах 100 состав чисел из слагаемых не может быть усвоен наизусть, а состав чисел из множителей усваивается не сразу и с трудом, решение примеров с x без вычислений становится обременительным. Надо поэтому обучить детей *выбирать действие,* которым решается каждый такой пример, и находить ответ при помощи вычислений. Вот образцы примеров, которые дети решают на втором году и по отношению к которым надо уметь выбрать действие:

1) $26 + x = 40$	2) $76 - x = 38$	3) $6 \times x = 30$	4) $72 = 4 \times x$
$x + 18 = 32$	$x - 27 = 53$	$x \times 7 = 35$	$72 = x \times 6$

Разберем каждую из этих групп примеров в отдельности.

1. Примеры $26 + x = 40$ и $x + 18 = 32$ решаются *вычитанием*. Чтобы дети это поняли, возьмем пример с небольшими числами: $5 + x = 8$ и проработаем его на наглядных пособиях. Рассуждаем так. Если к 5 кружкам прибавить еще несколько кружков, получится всего 8 кружков. Положим перед собой эти 8 кружков. *Отодвинем* слева 5 кружков. Какое же число надо прибавить к 5-ти, чтобы получить 8? Как мы нашли это число? Ответ ясен: чтобы узнать неизвестное число, надо от 8-ми *отнять* 5.

Совершенно также прорабатываем пример: $x + 6 = 10$. Отсчитываем 10 кружков. *Отодвигаем* справа 6 кружков. Ставим вопрос: к какому числу надо прибавить 6, чтобы получить 10? Делаем вывод: чтобы узнать неизвестное число, надо от 10 *отнять* 6.

2. Пример $76 - x = 38$ решается *вычитанием*, а пример $x - 27 = 53$ решается *сложением*. Чтобы объяснить это детям, поступаем, как и в предыдущем случае.

Возьмем пример $7 - x = 4$. Отсчитаем и положим перед собой 7 спичек. Если от 7 спичек несколько спичек отнять, останется 4 спички. *Отодвигаем* эти 4 спички, которые должны остаться, в сторону. Сколько же спичек надо отнять от 7 спичек, чтобы осталось 4 спички? Как мы это узнали? Вывод: чтобы узнать неизвестное число, надо от 7 *отнять* 4.

Возьмем теперь пример $x - 5 = 4$. Было несколько спичек, от которых отняли 5 спичек. Положим на стол эти 5 спичек. Осталось еще 4 спички. Положим на стол и эти 4 спички. Сколько же было спичек всего? Как мы это узнали? Как и в предыдущих случаях, вывод ясен: чтобы узнать неизвестное число, надо к 5 *прибавить* 4.

3. Примеры $6 \times x = 30$ и $x \times 7 = 35$ решаются *делением*. В первой случае это будет деление по содержанию, во втором случае — деление на равные части.

Берем пример: $2 \times x = 8$. Учитель откладывает на классных счетах 8 шариков. Сколько раз надо взять по 2 шарика, чтобы получить 8 шариков? Сколько раз 2 шарика содержится в 8-ми шариках? Учитель делит 8 шариков по 2. Сколько же раз 2 шарика содержатся в 8 шариках? Как мы это узнали? Вывод: чтобы узнать неизвестное число, надо 8 *разделить* по 2.

Берем еще пример: $x \times 2 = 10$. Этот пример читается так: какое число надо взять 2 раза, чтобы получить 10? Учитель выдвигает на середину проволоки 10 шариков. Эти 10 шариков составились из двух одинаковых чисел. Разделим 10 шариков на 2 группы, поровну шариков в каждой группе. Одновременно учитель отодвигает вправо и влево по одному шарику, деля таким образом 10 шариков на 2 равные части. Из каких же двух равных чисел состоят 10 шариков? Как мы это узнали? Вывод ясен и в этом случае: чтобы узнать неизвестное число, надо 10 *разделить* на 2 равные части.

4. Последняя группа примеров $72 = 4 \times x$ и $72 = x \times 6$ относится ко времени повторения состава чисел первой сотни. Первый пример можно читать так: сколько надо взять четверок, чтобы составить число 72? Вопрос этот решается делением по содержанию. Второй пример можно читать так: какое надо взять число, чтобы 6 таких чисел составили 72? Этот вопрос решается делением на равные части.

Решая примеры с x на втором году обучения, дети производят действие над числами устно, а затем переписывают пример в тетрадь, заменяя букву x соответствующим числом. Можно также записать действие, которым решается пример. Вот образцы такой записи:

а) $26 + x = 40$	б) $x - 27 = 35$	в) $8 \times x = 56$
$40 - 26 = 14$	$27 + 25 = 62$	$56 : 8 = 7$
$26 + 14 = 40$	$62 - 27 = 35$	$8 \times 7 = 56$

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ.

Во втором году, как и в первом, математические игры являются полезным средством для укрепления вычислительных навыков. Ряд игр, которые были указаны выше, в связи с проработкой курса первого года обучения, можно использовать, изменив числовые данные, и на втором году. Таковы различные виды лото, магические квадраты, круговые задачи, игры в волчок и в молчанку. Опишем еще несколько новых игр, которые можно ввести на втором году обучения.

Таблица умножения (лото). Игра состоит из 5 — 6 карт, разделенных на 8 равных клеток, в которые вписываются произведения любых двух чисел 4, 5, 6, 7, 8 и 9, по одному произведению в каждую клетку. Кроме того, делаются из дерева два кубика, на гранях которых пишутся те же однозначные числа. Каждый из играющих получает по карте и по 8-ми пустых квадратиков для закрывания клеток. Играющие по очереди выбрасывают 2 кубика. Ученик, выбросивший кубики, перемножает числа, находящиеся на их верхних гранях, и, если на его карте имеется полученное произведение, он его закрывает. Если такого произведения не окажется, он передает кубики своему соседу, который снова бросает их. Выигрывает тот, кто первый закроет все клетки на своей карте.

Отгадывание слов и фраз. На 32 карточках пишут с одной стороны 32 буквы русского алфавита, а с другой стороны числа от 1 до 32:

а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к	л	м	н	о	п	р	с
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
т	у	ф	х	ц	ч	ш	щ	ъ	ы	ь	э	ю	я	й		
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32		

Учитель пишет на доске группу примеров. Решив каждый пример, ученик должен взять из своего набора карточку с ответом. Примеры должны быть подобраны с таким расчетом, чтобы из букв, написанных на обороте карточек, можно было составить слово. Если ученику не удается составить слово, это свидетельствует о том, что один или несколько примеров решены неправильно. Приведем в качестве образца следующую группу примеров:

$$(19 \times 3) - (8 \times 5)$$
$$(54 : 9) + (51 : 3)$$
$$(64 : 4) - (100 : 10)$$
$$(72 : 8) + (63 : 7)$$

Решая эти примеры, ученик получит ответы 17, 23, 6 и 18. Этим числам соответствуют буквы *с, ч, е* и *т* которые образуют слово *счет*.

Из нескольких групп подобранных таким образом примеров можно составлять целые фразы.

ТРЕТИЙ ГОД ОБУЧЕНИЯ

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ В ПРЕДЕЛАХ ТЫСЯЧИ.

В пределах тысячи могут быть случаи арифметических действий более трудные и менее трудные для устного вычисления. Например, сложить в уме 380 и 270 или умножить 37 на 20 нетрудно; наоборот, сложить устно 387 и 275 или умножить 37 на 15 довольно трудно. Учащиеся будут охотно, с удовольствием заниматься устными вычислениями, если вычисления не будут обременительны для их памяти и не будут требовать от них чрезмерного напряжения внимания. Поэтому все случаи арифметических действий в пределах тысячи необходимо разбить на удобные и неудобные для устного вычисления. Очевидно, для вычисления в уме можно предлагать примеры и задачи только с числами, удобными для устного вычисления.

Нельзя сказать, чтобы такое разграничение вычислений было вполне определенно: с развитием вычислительных навыков детей область того, что для них доступно, должна расширяться. Концентром тысячи заканчивается второй год обучения и начинается третий год. На третьем году область упражнений, доступных для вычисления в уме, должна быть сравнительно с предыдущим годом расширена. Но все же в этом концентре останется немало случаев арифметических действий, трудных для вычисления в уме.

Наличность в пределах тысячи случаев действий, неудобных для устного вычисления, служит основанием для того, чтобы уже здесь начинать постепенный переход к письменным механизмам арифметических действий. Таким образом концентр первой тысячи будет заключать устные вычисления, которые будут отчасти служить повторением вычислительных приемов, уже пройденных во втором году, и переход к письменным действиям.

Сложение.

Случаи устного и письменного сложения в пределах тысячи. Область устных упражнений на сложение в пределах тысячи на третьем году должна быть сравнительно со вторым годом расширена. На третьем году доступны для устного вычисления еще следующие случаи сложения:

а) Дополнение до круглых сотен, когда одно из слагаемых — число однозначное или двузначное (196 + 4, 105 + 95, 132 + 68).

б) Сложение с переходом через сотню, когда одно из слагаемых — однозначное число или состоит из круглых десятков (97 + 5, 297 + 5, 75 + 60, 175 + 60).

К области письменного сложения будут отнесены: сложение трехзначного числа с двузначным и с трехзначным при наличности в числах разряда единиц (278 + 67, 308 + 463, 378 + 463).

Общие приемы устного сложения. На третьем году устные вычислительные приемы должны быть разнообразны. К разнообразию в выборе вычислительных приемов надо всячески побуждать детей, памятуя, что понятия о законах арифметических действий, имеющих столь большое значение для дальнейших ступеней арифметического образования, возникают главным образом на основе устных вычислений. Например, числа 360 и 75 можно сложить следующими способами:

1) 60 + 70 = 130, 300 + 130 + 5 = 435
2) 360 + 40 = 400, 75 − 40 = 35, 400 + 35 = 435.
3) 360 + 70 = 430, 430 + 5 = 435

Сложение с округлением. При сложении в уме чисел 145 и 98, второе слагаемое удобно округлить, т. е. взять 100 вместо 98. Сложив 145 и 100, получим 245. Так как мы прибавили 2 единицы лишних, то скинув их с суммы 245, получим 243.

Для того чтобы этот прием для детей был совершенно ясен, научим их сперва округлять числа.

Имея 99 коп., я могу сказать, что у меня без малого 100 коп. или 1 рубль.

В доме живет 198 человек. Мы можем сказать, что в этом доме без малого 200 человек.

Расстояния между двумя деревнями 31 *км*. Мы можем сказать, что между этими деревнями расстояние 30 *км* с лишком.

Вместо чисел:	*Взяли числа:*
99	100
198	200
31	30

Числа 100, 200, 30 могут быть названы *круглыми*. Поэтому говорят, что числа 99, 198, 31 *округлили*. Ученик не должен забывать, что числа 99 и 100 неравны, но 99 очень мало разнится от 100.

Произведем сложение чисел 145 и 98 с округлением. Сперва учащиеся выполняют это сложение, пользуясь основным приемом. 40 + 90 = 130, 100 + 130 = 230, 5 + 8 = 13, 230 + 13 = 243.

Короче делают так: 145 + 90 = 235, 235 + 8 = 243.

Сложение чисел 145 и 98 можно сделать еще короче, округлив 98.

По предложению учителя дети округляют число 98, прибавляют к 145 круглое число и полученный ответ исправляют.

Чтобы способ сложения был яснее, его можно в первых примерах иллюстрировать записью:

$$\begin{array}{l} \underline{145 + \ \ 98 = 243} \\ 145 + 100 = 245 \\ 245 - \quad 2 = 243 \end{array}$$

Оба способа сложения чисел — основной и способ округления ученики подвергают сравнительной оценке.

Письменное сложение. Письменное сложение чисел сводится к сложению их разрядных чисел, т. е. к сложению однозначных чисел, начиная с разряда единиц; при этом для удобства вычисления одно число подписывается под другим. Наоборот, при устном сложении пользуются разнообразными приемами вычисления, само сложение начинают с высших разрядов, а вычисление записывают в строчку.

Урок письменного сложения начнем с того случая, когда сумма единиц любого разряда меньше 10. Например, 325 + 413. Сделаем сложение сперва устно: прибавим к 325 число 400; для этого сложим разрядные числа 300 и 400, получим 700, а всего 725. Затем прибавим к 725 разрядное число 10; для этого сложим 10 и 20, получим 30, вместе же 735. Наконец, прибавим еще 3 к 735; для этого сложим 5 и 3, получим 8. Всего 738.

Сделаем теперь сложение письменно.

$$\begin{array}{r} 325 \\ +\ \ 413 \\ \hline 738 \end{array}$$

В первом числе 3 с., 2 д. и 5 ед., во втором — 4 с., 1 д., 3 ед. Подпишем одно число под другим так, чтобы 3 ед. стояли под 5 ед., 1 д. под 2 д. и 4 с. под 3 с. Сложим эти числа: 3 с. да 4 с. — 7 с.: где записать цифру 7? 2 д. да 1 д. — 3 д. (запишем цифру 3). 5 ед. да 3 ед. — 8 ед. (записываем). Всего — 738.

Сделав сложение указанных чисел, начиная с единиц, получим то же число 738.

$$\begin{array}{r} 235 \\ +125 \\ \hline 3\not{5}0 \\ 6\ \ \end{array} \qquad \begin{array}{r} 235 \\ +125 \\ \hline 360 \end{array}$$

Решим несколько примеров этого же типа с той целью, чтобы ученики усвоили запись слагаемых и сложение их по разрядам.

Переходим к тому случаю сложения, когда сумма единиц одного из разрядов равна 10: сложим 235 и 125.

Как в предыдущем случае, будем складывать числа по разрядам. Сколько сотен, десятков и единиц в первом числе? Во втором

числе? Начнем сложение с сотен: 2 с. да 1 с. — 3 с. (пишем); 3 д. да 2 д. — 5 д. (записываем); 5 ед. да 5 ед. — 10 ед., или 1 д. Будут ли в ответе единицы? Что пишем на месте единиц? Куда надо отнести один десяток? К 5 д. прибавим 1 д., получим 6 д. Переправим цифру 5 на 6.

Сложим эти же числа в обратном порядке, начиная с единиц: получим тот же ответ. Вместе с тем убедимся, что начинать сложение с единиц выгоднее,

Сделав несколько примеров второго типа, ученик научится соединять разрядные единицы в десяток и относить его к единицам высшего смежного с ними разряда, после чего можно перейти к следующему типу упражнений: к сложению чисел, в которых сумма единиц разряда больше 10. Например, 247 + 315.

Примеры и задачи на сложение могут быть предлагаемы в такой последовательности:

а) Сумма разрядных единиц меньше 10 (314 + 125, 425 + 32, 53 + 236, 405 + 223, 205 + 301).

б) Сумма разрядных единиц равна 10 (347 + 43, 247 + 133, 345 + 62, 356 + 152, 408 + 202, 360 + 240, 309 + 291).

в) Сумма разрядных единиц превышает 10 (328 + 54, 426 + 137, 452 + 183, 470 + 155, 405 + 208, 385 + 45, 275 + 155, 385 + 117, 247 + 85, 86 + 144, 347 + 125 + 284, 548 + 28 + 34, 245 + 98 + 7).

Процесс сложения ученики объясняют подробно. Мало по малу у них выработается простая и лаконическая форма рассуждения. Например:

$$\begin{array}{r} 365 \\ +\;167 \\ \hline 532 \end{array}$$

5 да 7 будет 12 единиц; 2 единицы записываем, а 1 десяток относим к десяткам. 1 десяток да 6 десятков — 7 десятков, да 6 десятков — 13 десятков; 3 десятка пишем, а одну сотню относим к сотням.

1 сотня да 3 сотни — 4 сотни, да еще 1 сотня, — всего 5 сотен. Записываем их. Всего получилось 532.

Не следует навязывать учащимся на этой ступени такую форму объяснения письменного сложения: 5 да 7 — 12, 2 пишу, 1 — в уме; 1 да 6 — 7, да 6 — 13; 3 пишу, 1 — в уме и т. д.

Некоторые ставят над цифрой слагаемого точку, чтобы не забыть присчитать единицу к соответствующему разрядному числу. Приводим пример:

Американские учителя называют такие вспомогательные знаки „костылями“. Нужны ли эти костыли? Думается, что для сложения они не нужны. Первое время, пока навыки в сложении не укрепились, можно записывать над разрядом слагаемого небольшую цифру — один, но затем от этого „костыля“ следует освободиться.

$$\begin{array}{r} \dot{3}\dot{6}5 \\ +\;167 \\ \hline 532 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 365 \\ +\;167 \\ \hline 532 \end{array}$$

Задачи на сложение. Занимаясь сложением, необходимо предлагать ученикам не только примеры, но и задачи. Назовем основные задачи, решаемые сложением.

а) Задачи, в которых непосредственно ясна необходимость соединения всех единиц данных чисел в одно число. Например:

В саду собрали 78 *кг* смородины и 46 *кг* малины. Сколько собрали всего ягод?

б) Задачи, в которых требуется увеличить число на данное число единиц, или узнать число, которое больше другого числа на данное число единиц.

в) Задачи, в которых по форме выражения даны вычитаемое и остаток, требуется же найти уменьшаемое. Например:

У гражданина была некоторая сумма денег. Когда он израсходовал 75 рублей, то у него осталось 45 руб. Какая сумма денег у него была?

Задачи этих трех типов предлагались неоднократно ученикам на первом и втором году. На третьем году надо особенное внимание обратить на те задачи, которые заключают требование сложения в неявном виде.

Вычитание.

Случай устного и письменного вычитания. Кроме тех случаев устного вычитания, которые были изучены во втором году, на третьем году следует проработать устно:

а) Вычитание однозначного или двузначного числа из круглых сотен (200 − 5, 300 − 47).

б) Вычитание с переходом через сотню, когда вычитаемое — однозначное число или круглые десятки (302 − 8, 236 − 70).

Письменно будем вычитать из трехзначного числа трехзначное (547 − 232, 653 − 201, 735 − 360) и из трехзначного числа двузначное с переходом через сотню (325 − 63, 402 − 75).

Приемы устного вычитания. На третьем году надо поощрять детей в их поисках разнообразных приемов устного вычитания. Для примера вычтем 70 из 236.

1) 230 − 70 = 160, 160 + 6 = 166.
2) 236 − 36 = 200, 70 − 36 = 34, 200 − 34 = 166.
3) 70 + 30 = 100, 236 − 100 = 136, 30 + 136 = 166.

Группы примеров на вычитание могут чередоваться с соответствующими группами примеров на сложение. Например:

а) 77 + 23, 164 + 36, 80 + 60, 280 + 60, 75 + 50, и т. п.
б) 100 − 37, 300 − 45, 130 − 60, 340 − 50, 144 – 80 и т. п.
в) (64 + 36) − (100 − 70); (128 − 70) + (210 − 150).

Письменное вычитание. Начнем вычитание с того случая, когда разрядные числа вычитаемого не больше разрядных чисел уменьшаемого. Вы-

чтем 230 из 796. Сделаем вычитание сперва устно. В числе 230 — 2 с. и 3 д. Вычтем из 796 сначала 2 сотни. Для этого из 7 с. вычтем 2 е., получим 5 е., всего же 596. Вычтем из числа 596 три десятка. Для этого из 9 д. вычтем 3 д., получим 6 д., а всего 566.

Подпишем одно число под другим и произведем вычитание письменно.

$$\begin{array}{r} 796 \\ -\ 230 \\ \hline 566 \end{array}$$

Из 7 с. вычесть 2 с. получится 5 с. (записываем). Из 9 д. вычтем 3 д., получим 6 д. (пишем). От 6 ед. ничего не отнимем, записываем 6 единиц.

Вычтем из 796 число 230, начиная с единиц. Сравним остатки при вычитании первым и вторым способом.

После нескольких примеров первого типа перейдем ко второму типу: вычтем 7 из 360. В числе 360 — 3 с. и 6 д. Возьмем от 6 десятков 1 десяток. От 10 отнимем 7, получим 3. Всего останется 3 с. 5 д. 3 ед. или 353.

$$\begin{array}{r} 360 \\ -\ 7 \\ \hline 353 \end{array}$$

Сделаем еще вычитание: 280 — 35. Это вычитание следует сделать двумя способами, начиная с высших разрядов и с единиц, с тем, чтобы показать возможность обоих способов и преимущество второго способа перед первым.

Проследим за теми рассуждениями, которые ученик должен сделать, вычитая 35 из 280 вторым способом. В числе 35 — 3 д. и 5 ед.; в числе 280 — 2 с. и 8 д. Вычтем из 280 сначала 5 ед. Будем вычитать так, как это мы делали в предыдущем примере: возьмем из 8 десятков 1 десяток. Тогда вместо 2 с. 8 д. будем иметь 2 с. 7 д. и 10 ед. От 10 ед., отнимем 5 ед., получим 5 ед. (пишем их); от 7 д. отнимем 3 д., получим 4 д. (записываем). От 2 с. ничего не отнимаем, пишем их. Всего осталось 245.

$$\begin{array}{r} 280 \\ -\ 35 \\ \hline 255 \\ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 280 \\ -\ 35 \\ \hline 245 \end{array}$$

Решая примеры второго типа, ученики приучатся занимать единицу высшего разряда, где это надо, иначе говоря, разлагать уменьшаемое на такие группы единиц, при которых вычитание становится легко выполнимым. Эти навыки создадут возможность перехода к примерам третьего типа, в которых разрядное число вычитаемого больше соответствующего разрядного числа уменьшаемого.

Упражнения даются в такой последовательности:

а) Разрядные числа вычитаемого не больше разрядных чисел уменьшаемого (796 − 230, 368 − 45, 736 − 34, 856 − 253, 754 − 254, 707 − 502).

б) Нуль в уменьшаемом, при наличности значащей цифры того же разряда в вычитаемом (360 − 7, 408 − 30, 280 − 53, 508 − 43, 580− 135, 608 − 125).

в) Разрядное число вычитаемого больше разрядного числа уменьшаемого (245 − 8, 485 − 67, 392 − 145, 318 − 40, 429 − 75, 527 − 285, 724 − 78, 713 − 235, 802 − 236, 600 − 8, 700 − 34, 800 − 127, 800 − 193).

В пределах тысячи можно временно допустить вспомогательную запись — 10 над цифрой уменьшаемого, когда это нужно. Например:

```
 .10       . 10 10
 582        431
−147       −147
----       ----
 435        284
```

В дальнейшем от этой записи необходимо отрешиться. Но точку над тем разрядом уменьшаемого, от которого занята единица, надо ставить.

```
  .
 452
−128
----
 324
```

Объяснения письменного вычитания должны иметь краткую, точную форму. Например: 8 единиц нельзя отнять от 2 единиц. Поэтому возьмем из 5 десятков 1 десяток; 10 да 2 = 12. 12 без 8 будет 4. Записываем 4. От 5 десятков мы взяли 1 десяток, осталось 4 десятка. 4 десятка без 2 десятков будет 2 десятка и т. д.

Задачи на вычитание. При прохождении вычитания примеры чередуются с задачами. Вычитанием решаются следующие основные задачи:

а) Задачи, в которых непосредственно ясна необходимость отнять от данного числа указанное число единиц. Например:

В колхозе было 245 *ц* зерна. Из этого зерна взяли на посев 186 *ц*.

Сколько зерна осталось?

б) Задачи, в которых требуется узнать разность двух чисел. Например:

Некрасов жил 56 лет, а Пушкин 37 лет. На сколько лет больше прожил Некрасов?

в) Задачи, в которых по форме выражения дано уменьшаемое и остаток, а требуется найти вычитаемое. Например:

В школе было 350 тетрадей. Часть их роздали ученикам, после чего осталось 180 тетрадей. Сколько тетрадей роздали ученикам?

Решая задачи всех этих типов, надо обратить особенное внимание на те из них, которые заключают требование вычитания в неявном виде.

Умножение.

Случаи устного и письменного умножения. На третьем году мы будем устно прорабатывать следующие случаи умножения:

1) Умножение на однозначное число:

а) круглых сотен;

б) круглых десятков;

в) чисел, состоящих из сотен и десятков;

г) двузначных чисел.

2) Умножение двузначного числа на 10 (33 · 10).

3) Умножение двузначного числа на круглые десятки (24 · 30).

В письменной форме мы будем умножать трехзначное число на однозначное.

Устное умножение на однозначное число. Умножение круглых сотен сводится к умножению в пределах первого десятка. Умножение круглых десятков сводится к табличному умножению в пределах первой сотни. Умножение числа, состоящего из сотен и десятков, можно свести к двум предшествующим случаям или же к внетабличному умножению в пределах 100. Например, чтобы умножить 180 на 3, поступаем так: $100 \times 3 = 300$; $80 \times 3 = 240$; $300 + 240 = 540$. Можно сделать иначе: 180 это 18 десятков. Умножим 18 десятков на 3. Получим 54 десятка, т. е. 540. Значит $180 \times 3 = 540$.

Письменное умножение. Письменное умножение многозначного числа на однозначное сводится к умножению разрядных чисел первого числа на второе.

Урок письменного умножения на однозначное число, начнем с простейшего примера 231×3, в котором произведение разрядных чисел (2, 3 и 1 на 3) менее 10.

Покажем детям новую запись умножения, запись, как они говорят, „в столбик“. Эта запись не будет для них чужда, так как они успели уже усвоить запись сложения и вычитания. Умножение сделаем двумя способами, начиная сперва с сотен, а затем, с единиц, и результаты сравним. Это мы делаем для того, чтобы избежать разрыва письменного умножения с устным, в котором умножение начинается с высших разрядов.

Сделав несколько примеров этого же типа, переходим затем ко второму типу, в котором произведение одного из разрядных чисел на однозначное число равно или больше 10.

Умножим 227 на 3, начиная с сотен. В числе 227 — 2 с. 2 д. 7 ед. По 2 с. возьмем 3 раза, получим 6 с. Где записать 6 сотен? По 2 д. возьмем 3 раза — 6 д. (записываем). По 7 ед. возьмем 3 раза, получим 21 или 2 д. 1 ед. Одну единицу записываем, а 2 д. относим к десяткам; но у нас уже есть 6 десятков: 6 д. да 2 д. — 8 д. Исправим цифру 6 на 8. Получим 681.

$$\begin{array}{r} 227 \\ \times\ 3 \\ \hline 661 \\ 8\ \ \end{array} \qquad \begin{array}{r} 227 \\ \times\ 3 \\ \hline 681 \end{array}$$

Произведем умножение 227 на 3, начиная с единиц. Сопоставив оба результата, мы увидим, что они одинаковы, но начинать умножение с единиц выгоднее, так как при этом не приходится в полученном числе исправлять цифр.

В следующих примерах будем начинать умножение с единиц. Умножим 207 на 4. Число 207 состоит из 2 с. и 7 ед. Чтобы взять 207 четыре раза, возьмем по 7 ед. и по 2 с. четыре раза, и полученные числа сложим. 4 раза по 7 = 28. Из них 8 ед. записываем, а 2 д. относим к десяткам. В числе 207 десятков нет, поэтому мы их умножать не будем. Но у нас уже получено 2 д., их мы запишем. Возьмем 4 раза по 2 с. = 8 с. (запишем). Всего получили 828.

$$\begin{array}{r} 207 \\ \times\ 4 \\ \hline 828 \end{array}$$

Особенное внимание надо обратить на примеры типов 225 × 2, 127 × 3 и 168 × 4, в которых произведения одного или двух разрядных чисел на однозначное число равно или больше 10. Этих примеров надо решить возможно больше. Для лучшего понимания группировки единиц произведения — можно записать в нескольких примерах произведение так:

```
        127                              168
        × 3                              × 4
  ─────────────────                ─────────────────
   3 с. 6 д. 21 ед.                 4 с. 24 д. 32 ед.
   3 с. 8 д.   1 ед.    = 381       4 с. 27 д.   2 ед.
                                    6 с.   7 д.   2 ед.    = 672
```

Последовательность упражнений:

а) Произведения разрядных чисел на однозначное число меньше 10 (231 × 3, 430 × 2, 302 × 3).

б) Произведение разрядного числа на однозначное число равно или больше 10 (115 × 4, 205 × 2, 353× 2, 225 × 4, 75 × 6, 227 × 3, 207 × 4, 72 × 4, 163 × 3, 68 × 3, 254 × 4, 145 × 4).

Устное умножение на 10. Основу этого случая умножения составляет то обстоятельство, что каждая единица при умножении числа на 10 преобразуется в десяток. Это есть не что иное, как распространение распределительного закона умножения на каждую единицу множимого. Чтобы учащиеся подметили эту особенность умножения на 10, надо проделать с ними несколько упражнений.

1 × 10 = 10   7 × 10 = 70
2 × 10 = 20   9 × 10 = 90   и т. д.

Замену единиц при их умножении десятками можно пояснить при помощи палочек и пучков.

Мы видим из этих примеров, что каждая единица числа, при умножении его на 10, заменяется десятком. Поэтому умножив, например, 36 на 10, получим 36 десятков, или 360. Решив еще несколько примеров, учащиеся сделают вывод правила: при умножении числа на 10 получится столько десятков, сколько во всем числе было единиц.

Так как умножение выполняется устно, то было бы преждевременно говорить о приписывании к множимому нуля. В правиле слова „во всем числе“ подчеркивают ту мысль, что имеются в виду все единицы числа, а не только разряд единиц. Вывод делают учащиеся, руководимые учителем, который затем исправляет вывод, придавая ему более изящную форму.

Устное умножение на круглые десятки. Умножение на круглые десятки сводится к последовательному умножению данного числа на число десятков и на 10. Например: 7 × 30 = (7 × 3) × 10 = 210. (Сочетательный закон умножения, стр. 22).

Чтобы этот способ был ученикам понятен, надо сделать его наглядным. Запишем на доске ряд: 6 + 6 + 6 + 6 + 6... и т. д., всего по 6 двадцать раз. Если доска мала, то можно выписать слагаемые на длинной полосе бумаги. Складывать эти числа долго, утомительно. Поэтому, перепишем их иначе: в виде 10 строк, в каждой строке 2 раза по 6.

6 + 6
6 + 6
6 + 6
6 + 6
6 + 6
6 + 6
6 + 6
6 + 6
6 + 6
6 + 6

Здесь записано: по 6 взять 20 раз или 6 × 20. Сосчитаем, сколько единиц в одной строке. Для этого по 6 возьмем два раза: 6 × 2 = 12. Сосчитаем, сколько единиц в 10 строках. По 12 надо взять 10 раз: 12 × 10 = 120. Итак умножение 6 на 20 мы выполнили посредством двух действий; 1) 6 × 2 = 12; 2) 12 × 10 = 120.

$$6 \times 2 = 12$$
$$12 \times 10 = 120$$
$$6 \times 20 = (6 \times 2) \times 10 = 120$$

Объясняя этот случай умножения, мы воспользовались следующим образом: 20 слагаемых, по 6 каждое, сперва расположены в ряд; затем они перегруппированы в 10 строк, по 2 слагаемых в строке. Можно было бы сумму всех слагаемых вычислить иначе — сосчитать, сколько единиц в одном столбике (6 × 10), а затем, сколько единиц в двух столбиках (60 × 2 = 120). Первый способ, как будто-бы, легче, так как легче умножить 6 на 2, чем 60 на 2.

Для того чтобы учащиеся хорошо усвоили и прием умножения на круглые десятки и объяснение этого приема, необходимо, чтобы в их воображении легко возникал образ этого умножения. А для этого первые примеры умножения на круглые десятки следует пояснить наглядными пособиями. Равные слагаемые могут быть написаны учениками на карточках, которые сперва располагаются в ряд, затем группируются так, как сказано выше. Слагаемые могут быть написаны просто на плакатах или на доске, или даже представлены на счетах (3 × 20, 5 × 20, 3 × 30, 2 × 40).

Вывод правила в самой общей форме был бы для детей в начале третьего года обучения затруднителен. Достаточно, если учащиеся, умножив, например, 18 на 40, будут говорить:

Чтобы умножить 18 на 40, надо 18 умножить на 4 и полученное число 72 — на 10.

Упражнения следует расположить в таком порядке:

а) Множимое — однозначное число (5 × 30, 8 × 50).

б) Множимое — двухзначное число (25 × 30, 35 × 20, 10 × 40, 20 × 30).

Задачи на умножение. Умножением решаются следующие основные задачи:

а) Задачи, в которых даны — одно из равных слагаемых и число их, требуется же найти сумму. Например:

Гражданин купил 5 огурцов, по 30 коп. за огурец. Сколько заплатил он за огурцы?

в) Задачи, в которых надо увеличить число в данное число раз или узнать число, которое больше другого числа в данное число раз.

с) Задачи, в которых дана одна часть числа, а ищется все число. Например: $^1/_5$ *кг* сахару стоит 28 коп. Сколько стоит 1 *кг* сахару?

Деление.

Случаи устного и письменного деления. На третьем году в пределах тысячи изучаются следующие случаи устного деления:

1. Простейшие случаи деления на однозначное число.
2. Деление на 10.
3. Деление на круглые десятки.

Более трудные случаи деления трехзначного числа на однозначное (712 : 4) будем выполнять письменно.

Возникает вопрос, дать ли место делению трехзначного числа на двузначное при однозначном и при двузначном частном в пределе тысячи? На этот вопрос приходится ответить отрицательно. Эти два случая письменного деления представляют значительные трудности и не соответствуют характеру концентра первой тысячи, главное содержание которого составляют устные действия и переход к письменным действиям. Этот концентр по его принципиальным установкам не должен конкурировать со следующей ступенью многозначных чисел, к которой и должны быть отнесены два названных случая деления.

Понятия и навыки учащихся, приступающих к делению. В первом и во втором году учащиеся представляли себе деление в конкретной форме, чему соответствовали и образные выражения этого действия. Так, деля 56 на 7, ученик говорил: 56 разделить на 7 равных частей, или 56 разделить по 7, или узнать, сколько раз 7 содержится в 56. На втором году начат процесс объединения обоих видов деления.

На третьем году учащиеся должны иметь уже общее понятие о делении, как о действии, включающем оба его вида (стр. 23). Добиваться того, чтобы они умели объяснить причину единства обоих видов деления, было бы нецелесообразно: это объяснение слишком для них отвлеченно и находится вне их потребностей и интересов. Достаточно, если ученик знает, что деля, например, 300 на 4 равные части или узнавая, сколько раз 4 содержится в 300, он получит одно и то же число 75.

Выражение 75 *м* : 3 учащиеся должны уметь читать: конкретно — 75 *м* разделить на 3 равные части и отвлеченно — 75 разделить на три.

Выражение 75 *м* : 3 *м* они должны уметь также прочесть: конкретно — узнать сколько раз 3 *м* содержится в 75 *м* или 75 *м* разделить по 3 *м*, и отвлеченно — 75 разделить на три.

Несмотря на то, что у учащихся на третьем году обучения уже должно быть сознание единства обоих видов деления, все же надо не один раз возвращаться к этому вопросу, чтобы сделать его возможно более отчетливым. Подобно тому как это делалось на втором году, следует предложить ученикам ряд задач и примеров попеременно то на один, то на другой вид деления. Например:

За 75 коп. куплены 5 одинаковых тетрадей. Сколько стоит тетрадь?

За 75 коп. куплены тетради, каждая стоит 5 коп. Сколько тетрадей куплено?

Разделить 144 на 3 равные части. Сколько троек в числе 144?

Приступая к делению в пределах тысячи, ученики должны иметь понятие о делении, как о действии, обратном умножению. Так, вычислив произведение $17 \times 6 = 102$, ученик может сказать, не производя вычисления, сколько получится, если разделить 102 на 17 или на 6. Разделив 144 на 6 и получив 24, ученик хорошо знает, что $24 \times 6 = 144$. Эти понятия должны быть приобретены на первом и втором году обучения в связи с изучением таблицы умножения и деления.

Устное деление на однозначное число. Сюда относятся следующие простейшие случаи деления:

1)	600 : 3	2)	300 : 5	3)	280 : 7
	840 : 4		900 : 6		560 : 4

Деление круглых сотен в простейшем случае сводится к делению однозначных.

Чтобы 840 разделить на 4, надо разложить это число на сотни и десятки, и затем делить 8 сотен и 4 десятка, как однозначные числа.

Несколько труднее те случаи деления, когда цифра сотен не делится на данное число. Пусть надо 300 разделить на 5 равных частей. Рассуждаем так: 300 — это 30 десятков; 30 десятков разделить на 5 равных частей, получится 6 десятков, т. е. 60. Значит, 300 : 5 = 60.

Разделим 900 на 6. Для этого разобьем 900 на два числа: 600 и 300. Разделим 600 на 6, получим 100. Затем разделим 300 на 6, получим 50, а всего 150. Можно поступить иначе: 900 — это 90 десятков. Разделим 90 десятков на 6, получим 15 десятков, т. е. 150. Значит, 900 : 6 = 150.

Разделим 280 на 7. Рассуждаем так: 280 — это 28 десятков. Разделим 28 десятков на 7, получим 4 десятка, т. е. 40. Значит, 280 : 7 = 40.

Разделим, наконец, 560 на 4. Для этого разобьем 560 на два числа: 400 и 160. Разделим 400 на 4, получим 100. Затем разделим 160 на 4, получим 40,

а всего 140. Можно поступить иначе: 560 — это 56 десятков. Разделим 56 десятков на 4, получим 14 десятков, т.е. 140. Значит, 560 : 4 = 140.

Письменное деление трехзначного числа на однозначное. Деление трехзначного числа на однозначное сводится к делению определенных десятичных групп, на которые мы разделяем делимое. Так, чтобы разделить 735 на 3, мы заменяем число 735 суммой его десятичных групп 600 + 120 + 15 и делим каждую из этих групп на 3. Из этого примера видно, что приступая к этому случаю деления, ученики должны уметь: 1) делить двузначное число на однозначное, при однозначном частном (например, 15 : 3), 2) делить трехзначное число на однозначное, когда в частном получаются круглые десятки (например, 120 : 3) и 3) делить круглые сотни на однозначное, когда в частном получаются круглые сотни (например, 600 : 3). Все эти случаи деления уже встречались детям во время устных вычислений. Разложение делимого на такие группы, из которых каждая делится без остатка на делителя, точно также им знакомо (например, 75 : 3, 900 : 6, 560 : 4). Тем не менее для устного деления приведенный пример труден. В этом случае мы обращаемся к письменному приему.

Надо различать прием устного деления и механизм (правило) письменного деления. Первое выполняется с подробными объяснениями самих основ деления, объяснения же механизма относятся главным образом к записям. Приведем пример:

Устное деление с объяснениями:

735 : 3 = 245

Разобьем 735 на две части — 600 и 135. Разделив 600 на 3, получим 200, т. е. сотни искомого числа.

Остается разделить 135 на 3. Разобьем 135 на две части — 120 и 15. Разделим 120 на 3, получим 40, т. е. десятки искомого числа.

Остается разделить 15 на 3. Получим 5, т. е. единицы искомого числа. Складываем 2 сотни, 4 десятка и 5 единиц. Получаем 245.

Письменное деление с объяснениями:

```
735 : 3
6     245
--
13
12
--
 15
 15
 --
```

Разделим 7 сотен на 3, получим 2 сотни. Умножим 2 сотни на 3, получим 6 сотен.

Из 7 сотен отнимем 6 сотен, получим 1 сотню. Одна сотня да 3 десятка, 13 десятков, которые делим на 3; получим 4 десятка и т.д.

Когда учащиеся твердо усвоят устное деление на однозначное число, то можно приступить к письменному делению. Переход от устного к письменному делению должен быть постепенным: не следует поспешно навязывать детям письменный механизм деления, чтобы он не превратился в непонятный для них фокус.

Разделим сперва 963 на 3. Для этого разобьем 963 на 9 с., 6 д. и 3 ед. и будем делить на 3 каждый разряд, начиная с сотен. Запись обычная: 963 : 3 = 321.

Перейдем к тому случаю деления, когда не все разрядные цифры числа — кратные делителя, например 580 : 4.

Разделим 580 на 4 сперва устно. Для этого разобьем 580 на 2 числа: 400 и 180. Разделим 400 на 4, получим 100. Далее 180 разобьем на 2 числа: 160 и 20. Разделим 160 на 4, получим 40 и 20 на 4, получим 5. Сложим 100, 40 и 5, получим 145.

Мы сделали деление устно. Приходилось удерживать в памяти много чисел. Чтобы не забывать этих чисел, будем их записывать. Сделаем деление с записью:

580 : 4
400 1 с. 4 д. 5 ед.
180 = 145.
160
20
20

В числе 580 заключается 5 сотен. Разделим 5 сотен на 4 равные части. Получим в каждой части по 1 сотне, которую запишем. Мы разделили всего 4 сотни или 400. Узнаем, сколько единиц осталось неразделенных. Для этого из 580 возьмем 400, получится 180. В 180 заключается 18 десятков. Разделим 18 десятков на 4 равные части получим в каждой части по 4 десятка, которые записываем. Узнаем, сколько десятков мы разделим: 4 д. × 4 = 16 д. Мы разделили 16 десятков или 160. Узнаем, сколько единиц осталось неразделенных: 180 – 160 = 20. Разделим 20 на 4, получим 5 единиц, которые записываем. Число 580 мы разбили на 3 части — 400, 160 и 20. Каждую часть мы разделили на 4, получили 100, 40 и 5, а всего 145.

Проверим, так ли мы разделили: число 580 разделено на 4 разные части, в каждой части получено по 145. Узнаем, сколько единиц всего мы разделили: 145 × 4 = 580. Деление сделано верно.

Последующие примеры на деление в пределах 1000 будем решать так же. Сокращать запись и объяснения, приближая их к обычному трафарету, пока не следует. Единственное сокращение, которое следует сделать, будет относиться к частному: можно будет не писать наименований его разрядов.

Деление трехзначного числа на однозначное представляет для учеников трудности. Чтобы преодолеть их, следует требовать подробное объяснение деления, в котором самая важная мысль заключается в следующем: деля 580 на 4, мы разбили 580 на 3 числа, 400, 160 и 20. Почему 580 мы разбили именно на эти числа? Чтобы в ответе получить сотни, десятки и единицы: 400 : 4 = 100, 160 : 4 = 40, 20 : 4 = 5.

Надо помнить, что письменное деление в пределах тысячи служит *переходной ступенью* к механизму письменного деления многозначных чисел и поэтому оно должно еще сохранять в себе следы устного деления с подробными объяснениями и подробной записью.

П о с л е д о в а т е л ь н о с т ь   у п р а ж н е н и й:

а) Разрядные числа делимого — кратные делителя (693 : 3, 804 : 4, 480 : 2).

б) Не все разрядные числа —кратные делителя (230 : 2, 651 : 3, 300 : 2, 420 : 3, 528 : 4, 580 : 4, 300 : 4, 340 : 4, 204 : 3, 624 : 3).

Устное деление на 10. При делении чисел на 10 мы можем пользоваться тремя способами рассуждения, которые поясним на примере 240 : 10.

1. Чтобы разделить 240 на 10, узнаем, сколько раз 10 содержится в 240. В этом числе 24 десятка. Значит десяток содержится в этом числе 24 раза. Поэтому 240 : 10 = 24.

2. Каждый десяток при делении на 10 равных частей преобразуется в единицу. В числе 240 всего 24 десятка. Поэтому, разделив 240 на 10, получим 24.

3. Деля 240 на 10, получим 24, потому что 10 × 24 = 240.

После объединения обоих видов деления все эти три способа объяснения деления равно возможны. При делении числа на 10, можно временно пользоваться вперемежку то первым способом рассуждения, то вторым. Третий способ может служить для проверки деления. Однако первый способ надо признать наиболее простым и удобным.

После того, как ряд примеров будет решен, приступим к выводу правила. Пересматривая примеры, обращаем внимание учеников на то, что в каждом примере мы делим число на 10 и получаем столько единиц, сколько в числе десятков. Поэтому при делении числа на 10 получается столько единиц, сколько в числе десятков.

Сделаем еще деление на 10 с остатком. Разделим 365 на 10. Для этого узнаем, сколько раз в 365 содержится 10. В числе 365 всего 36 десятков, значит 10 содержится в этом числе 36 раз. Сколько единиц мы разделили? 10 × 36 = 360. Сколько единиц осталось неразделенных? 365 − 360 = 5.

Запись: 365 : 10 = 36 (ост. 5).

Устное деление на круглые десятки. Деля 320 на 40, мы обычно делим просто 32 на 4. Этот способ деления можно теоретически обосновать, сославшись на известное свойство частного; частное не изменяется, если делимое и делитель уменьшить в одно и то же число раз. Однако это обоснование не может еще быть сделано на третьем году. Поэтому прием деления на круглые десятки должен быть преподан иначе, исходя из конкретного смысла деления. Мы делим 320 на 40, чтобы узнать: сколько раз 40 содержится в 320 или сколько получится в каждой части, если 320 разделить на 40 равных частей.

Чтобы научить детей делить на круглые десятки, мы можем воспользоваться одним или другим смыслом деления.

1. Разделим 240 на 30. Для этого узнаем, сколько раз 30 содержится в 240.

В числе 30 заключается 3 десятка, а в 240 — 24 десятка; 3 десятка содержится в 24 десятках 8 раз, потому что 3 дес. × 8 = 24 дес.

Чтобы разделить 240 на 30, достаточно 24 разделить на цифру десятков 3.

2. Можно 240 разделить на 30 иначе. Разделим 240 на 10 равных частей, в каждой части получим по 24. Для наглядности запишем каждую часть отдельно, подобно тому как это сделано на чертеже 13.

Разделим каждую часть еще на 3 равные части, получим 8. Число 240 теперь разделено на 30 равных частей, в каждой части получим по 8.

Проделав несколько подобных делений на 20, 30, 40, делаем выводы применительно к этим случаям деления. Например, чтобы разделить 320 на 40, достаточно 32 разделить на 4. Более общий вывод был бы для учащихся затруднительным и несвоевременным.

Из этих двух способов деления на круглые десятки — первый проще, доступнее, и поэтому им чаще пользуются. Второй способ более ценен в теоретическом смысле, так как он основан на известном свойстве деления (стр. 25), но он труднее.

Примеры устного деления можно сгруппировать так:

а) Частное — однозначное число (350 : 50).

б) Частное — двузначное число (240 : 20, 600 : 30).

Решим пример на деление с остатком.

Разделим 250 на 30. Для этого, узнаем, сколько раз 30 содержится в 250, или сколько раз 3 десятка содержатся в 25 десятках: получим 8 раз.

Узнаем, сколько единиц мы разделили: 30 × 8 = 240. Сколько единиц осталось неразделенных: 250 — 240 = 10.

Задачи на деление. Основные задачи на деление следующие:

а) Задачи, в которых данное число требуется разделить на несколько равных частей.

б) Задачи, в которых надо узнать, сколько раз одно число содержится в другом.

в) Задачи, в которых надо узнать данную часть числа.

г) Задачи, в которых надо число уменьшить в данное число раз, или узнать число, которое меньше другого числа в данное число раз.

д) Задачи, в которых надо узнать, во сколько раз одно число меньше или больше другого числа.

Задачам на деление, в виду их трудности, надо уделять особенно много внимания.

Общие замечания об умножении и делении в пределах тысячи. Выше было сказано, что в пределах тысячи имеются удобные для устного вычисления случаи умножения и деления и неудобные. Удобные случаи составляют материал для практики устного вычисления.

Что касается тех случаев умножения и деления, которые выполняются письменно, то на них надо смотреть как на переходные к механизмам письменного умножения и деления над многозначными числами. Поэтому записи умножения и деления в пределах тысячи и объяснения этих действий могут быть более подробные, чем на следующей ступени. Необходимо главное внимание обращать на понимание учащимися объяснения письменных действий и на рассуждения. Механические же навыки в письменных действиях учащиеся приобретут на следующей ступени, в пределах миллиона.

Именованные числа в пределах тысячи.

Именованные числа на третьем году. На третьем году именованные числа встречаются ученикам несколько раз: в пределах тысячи, в пределах миллиона, в задачах на время и при вычислении площадей. В каждом случае над именованными числами проделываются почти одни и те же операции, но каждый случай имеет и свои особенности. Повторение одних и тех же действий с некоторыми отличиями благоприятно для их усвоения.

В концентре тысячи в действиях над именованными числами имеются случаи, удобные и неудобные для устных вычислений, что служит основанием к разграничению устных и письменных действий над именованными числами. В этом концентре возможны действия над именованными числами, заключающими меры длины, веса, стоимости и времени. Однако целесообразно ограничиться здесь мерами длины и стоимости, отнеся меры времени и веса на следующую ступень. В пользу такого разграничения можно сказать следующее: действия над именованными числами, заключающими меры времени, вследствие особенностей их единичных отношений трудны и требуют немало времени, которое в концентре тысячи весьма ограничено; вычисления же над именованными числами, заключающими меры веса, часто выходят за пределы тысячи.

Об именованном числе и о мерах ученик должен иметь конкретное, образное представление, для чего понятия именованных чисел следует вырабатывать в связи с измерениями. Тогда преобразования именованных чисел будут ясны, понятны. Так, чтобы справиться с раздроблением 5 *дм* 8 *см* в сантиметры, ученик должен представлять себе, как могло возникнуть это число и сколько сантиметров в дециметре.

Раздробление именованных чисел. Раздробление именованного числа состоит в замене его мер более мелкими мерами. Возьмем бечевку в 3 *м* длиной, отметим на ней метры. Сосчитаем, сколько дециметров в 3 *м*.

На одном метре мы могли бы отмерить 10 *дм*, то же на другом и на третьем метре. На всей бечевке можно отмерить 30 *дм*, т. к. 10 *дм* × 3 = 30 *дм*. Поэтому можно сказать, что длина ее равна 3 *м* или 30 *дм* и записать 3 *м* = 30 *дм*. В этом примере мы заменили метры более мелкими мерами или, как говорят, 3 *м* раздробили в дециметры.

Раздробив также 5 *дм* в сантиметры, получим 5 *дм* = 50 *см*. Раздробим еще 3 *дм* 5 *см* в сантиметры. Нам надо дециметры заменить сантиметрами. Узнаем, сколько сантиметров в 3 *дм*: 10 *см* × 3 = 30 *см*. Узнаем, сколько сантиметров в числе 3 *дм* 5 *см*: 30 *см* + 5 *см* = 35 *см*. 3 *дм* 5 *см* и 35 *см* — одна и та же длина, поэтому 3 *дм* 5 *см* = 35 *см*.

Раздробляя метрические именованные числа, мы выполняем действия в уме и результат записываем в виде равенства; например, 5 *м* 38 *см* = 538 *см*.

Упражнения в раздроблении можно давать в таком порядке:

а) Раздробление простого именованного числа (15 *м* в дециметры, 7 *м* в сантиметры).

б) Раздробление составного именованного числа (5 *м* 7 *дм* в дециметры, 3 руб. 25 коп. в копейки).

Превращение именованных чисел. Превращение именованного числа состоит в замене мер данного именованного числа более крупными мерами. Возьмем полосу бумаги, на которой нанесены 40 *см*: длина полосы 40 *см*. Сосчитаем, сколько на этой полосе можно отмерить дециметров. 1 *дм* = 10 *см*, поэтому каждые 10 *см* можно заменить одним дециметром. На полосе можно отмерить столько дециметров, сколько раз 10 *см* содержится в 40 *см*; 40 *см* : 10 *см* = 4 (*дм*). 40 *см* и 4 *дм* — одна и та же длина, поэтому 40 *см* = 4 *дм*.

В этом примере мы сантиметры заменили более крупными мерами — дециметрами. Иначе говорят — 40 *см* превратили в 4 *дм*. Узнаем еще:

Сколько метров в 20 *дм*? 20 *дм* = 2 *м*.

Сколько дециметров в 35 *см*? 35 *см* = 3 *дм* 5 *см*.

Превратим 280 коп. в рубли. Иначе можно сказать: узнаем, сколько рублей в числе 280 коп.

100 коп. составляет 1 руб. В 280 коп. столько рублей, сколько сотен в числе 280. Поэтому 280 коп. = 2 руб. 80 коп.

Упражнения расположим в таком порядке:

а) Превращение в простое именованное число (30 *дм*, 500 коп).

б) Превращение в составное именованное число (45 *см*, 350 коп.).

Чтобы ученики не смешивали терминов *раздробить* и *превратить*, следует раздробление и превращение сопоставлять:

Раздробить 2 *м* 75 *см* в сантиметры. Раздробить именованное число — значит заменить меры данного именованного числа более мелкими, дробными мерами, в нашем примере — метры сантиметрами.

Превратить 325 *см* в метры. Превратить — то же, что заменить меры данного именованного числа более крупными мерами, в нашем примере — сантиметры метрами.

Устное сложение именованных чисел. Сложение именованных чисел ученик должен себе представить так:

Складывая 5 *см* и 3 *см*, мы эти числа соединяем, получаем 8 *см*.

Складывая 2 *дм* и 5 *см*, мы эти числа просто пишем рядом — 2 *дм* 5 *см*.

Складывая 3 *дм* 5 *см* и 2 *дм* 1 *см*, мы относим дециметры к дециметрам и сантиметры к сантиметрам, получаем 5 *дм* 6 *см*. К устному сложению можно отнести следующие случаи:

а) Сложение простых именованных чисел без превращения (25 коп. + 17 коп., 28 *см* + 14 *см*, 250 *м* + 180 *м*).

б) Сложение простых именованных чисел с превращением в простое именованное число (45 коп. + 55 коп., 480 *м* + 520 *м*).

в) Сложение простых именованных чисел с превращением в составное (75 коп. + 55 коп., 84 *см* + 36 *см*).

г) Сложение составного именованного числа с простым и с составным именованным числом в простейших случаях (4 *м* 7 *дм* + 8 *дм*, 3 *дм* 6 *см* + + 2 *дм* 8 *см*, 2 руб. 80 коп. + 60 коп., 3 *м* 80 *см* + 4 *м* 20 *см*, 3 *м* 80 *см* + + 1 *м* 50 *см*).

Письменное сложение именованных чисел. Устные примеры на сложение именованных чисел вполне подготовляют ученика к пониманию письменного сложения, которое отличается от устного главным образом записью в „столбик“.

2 *м* 75 *см*
+ 65 *см*
3 *м* 40 *см*

Для примера сложим 2 *м* 75 *см* и 65 *см*.

Эти два числа удобнее складывать, подписав одно под другим. Как подписать? ли чего начнем складывать?

Сложим 75 *см* и 65 *см*: 5 да 5 — 10; 0 запишем, а 1 д. относим к десяткам; 1 да 7 — 8, да 6 — 14 десятков; 4 д. подпишем под десятками. Еще осталась одна сотня или 100 *см*. Но 100 *см* = 1 *м*; прибавим 1 *м* к 2 *м*, получим 3 *м* (пишем). Всего получим 3 *м* 40 *см*.

К письменному сложению отнесем следующие случаи:

а) Сложение нескольких простых именованных чисел с превращением в составное (75 коп. + 83 коп. + 42 коп.).

б) Сложение составного именованного числа с простым (2 руб. 67 коп. + + 53 коп.; 84 руб. 57 коп. + 68 руб.; 3 *м* 85 *см* + 55 *см*).

в) Сложение составных именованных чисел (5 руб. 37 коп. + 2 руб. 23 коп.; 3 *м* 78 *см* + 1 *м* 42 *см*).

Устное вычитание именованных чисел. Вычитание именованных чисел ученик должен себе представить так:

Вычитая 5 *см* из 8 *см*, получаем 3 *см*.

Отнять 5 *см* от 3 *дм* нельзя, пока 1 *дм* мы не заменим сантиметрами; тогда вместо 3 *дм* будем иметь 2 *дм* 10 *см* и 5 *см* будем вычитать из 10 *см*.

Вычитая 3 *м* 2 *дм* из 7 *м* 8 *дм*, мы отнимаем дециметры от дециметров, а метры от метров.

Чтобы из 7 *м* 2 *дм* вычесть 3 *м* 7 *дм*, мы должны первое из этих чисел заменить другим числом — 6 *м* 12 *дм*.

Эти представления вырабатываются при помощи ряда упражнений, которые должны быть подобраны в строгой последовательности, например, так:

а) Вычитание простого именованного числа из простого без раздробления (85 *см* — 19 *см*, 360 *м* — 140 *м*).

б) Вычитание простого именованного числа из простого с раздроблением (2 *м* — 35 *см*, 1 *км* — 750 *м*).

в) Вычитание составного именованного числа из простого (3 руб. — 1 руб. 25 коп.).

г) Вычитание простого именованного числа из составного:

(2 *м* 60 *см* — 30 *см*, 35 руб. 25 коп. — 17 руб., 1 *м* 20 *см* — 40 *см*).

д) Вычитание составного именованного числа из составного в простейших случаях (3 *м* 7 *дм* — 2 *м* 3 дм, 5 *м* 3 *дм* — 2 *м* 7 *дм*).

Письменное вычитание именованных чисел. Предыдущие устные упражнения подготовляют учеников к письменному вычитанию именованных чисел. Приведем здесь образец этого действия.

Вычтем 75 *см* из 3 *м* 28 *см*. Подпишем числа так:

```
  3 м 28 см
−     75 см
───────────
  2 м 53 см
```

75 *см* вычесть из 28 *см* нельзя, но из 3 *м* 28 *см* можно: возьмем из 3 *м* один метр и раздробим его в сантиметры, получим 100 *см*. К 100 *см* прибавим 28 *см*, получим 128 *см*. Вместо именованного числа 3 *м* 28 *см* получим 2 *м* 128 *см*. Вычтем 75 *см* из 128 *см* и т.д.

Примеры могут быть даны в такой последовательности:

а) Вычитание простого именованного числа из составного (3 *м* 75 *см* — — 48 *см*, 3 руб. 25 коп. — 68 коп.).

б) Вычитание составного именованного числа из составного (7 руб. 85 коп. — 3 руб. 27 коп., 5 *м* 25 *см* — 2 *м* 48 *см*).

Множимое — именованное число, множитель — отвлеченное число. В умножении именованных чисел есть особенность, которую дети должны понять и усвоить. Множитель — всегда отвлеченное число, множимое и произведение — именованные числа. В концентре первой тысячи эту особенность ученики постигают эмпирически, не выражая словами. По существу в этом свойстве множителя нет ничего нового: и раньше умножая 5 шариков на 3, ученик говорил: по 5 шариков взять 3 раза. Но в действиях

над именованными числами данные числа невольно сопоставляются; поэтому надо подчеркнуть то, что множитель остается всегда без наименования единиц. Это качество множителя особенно резко обнаруживается при решении задачи, где число, переходя из задачи, в которой оно имело наименование, в действие, теряет название единиц. Решая задачу на умножение, надо обращать на это внимание детей.

Купили 3 *м* ситцу по 1 руб. 75 коп. за метр. Сколько заплатили за ситец?

Надо 1 руб. 75 коп. умножить на 3, иначе, надо 1 руб. 75 коп. взять 3 раза. Число 3 запишем без названия меры: отчего?

Прорабатывая умножение именованных чисел, мы будем одни примеры решать устно, другие письменно.

Устное умножение именованных чисел. Из всех случаев умножения именованного числа на отвлеченное к устному умножению мы относим всего два случая:

а) множимое — простое именованное число, произведение также простое (25 коп. × 8);

б) Множимое простое, а произведение — составное именованное число (30 *см* × 7).

Другие случаи умножения, если их выполнять устно, были бы для детей затруднительны.

Умножая 30 *см* на 7, пишем 30 *см* × 7 = 210 *см* = 2 *м* 10 *см*.

Письменное умножение именованных чисел. Умножить 2 руб. 45 коп. на 3 мы можем двумя способами — раздробляя множимое или оставляя его без раздробления.

2 р. 45 к.	2 р. 45 к.
× 3	× 3
735 к.= 7 р. 35 к.	6 р. 135 к.= 7 р. 35 к.

При умножении метрических составных именованных чисел первый способ выгоднее; при умножении неметрических составных именованных чисел, например, 6 час. 35 мин. на 4, удобнее второй способ.

Умножая 2 руб. 45 коп. на 3, рассуждаем так: 2 руб. 45 коп. — то же, что 245 коп. Умножим 245 коп. на 3, получим 735 коп. или 7 руб. 35 коп.

Упражнения будем давать в такой последовательности:

а) Множимое — составное именованное число, произведение — простое именованное число (3 *м* 5 *дм* × 6).

б) Множимое и произведение — составные именованные числа (2 *м* 25 *см* × 6; 3 *м* 7 *дм* × 8).

Виды деления именованных чисел в пределе тысячи. Различают деления именованного числа на отвлеченное и именованного — на именованное. Первый вид деления легче второго, поэтому в концентре тысячи

можно пока ограничиться этим видом. Когда в примере или задаче требуется разделить именованное число на отвлеченное, ученик должен характеризовать этот вид деления словами: разделить на столько-то равных частей.

Существенной особенностью этого вида деления является раздробление делимого. На этой особенности и надо сосредоточить внимание учащихся. Так, случаи деления 3 руб. : 5; 2 *м* 65 *см* : 5; 7 руб. : 4; 4 *м* 65 *см* : 3 требуют раздробления делимого полностью или частью.

Устное деление именованного числа. Устное деление ограничим следующими случаями:

а) Делимое и частное — простые именованные числа одного наименования (750 *кг* : 5).

б) Делимое и частное — простые именованные числа различного наименования (3 руб. : 5).

Деля 3 руб. на 5, мы в ответе не получим рублей. Получатся ли копейки? Как же их получить? Надо раздробить 3 руб. в копейки, получится 300 коп. и т. д.

Письменное деление именованного числа. Разделим 2 *м* 65 *см* на 5 равных частей. В ответе метров не будет: отчего? Получатся ли сантиметры? Как разделить 2 *м* 65 *см* на 5? Раздробим 2 *м* 65 *см* в сантиметры: 2 *м* 65 *см* = 265 *см* и т. д.

2 *м* 65 *см* :	5	4 р. 35 к. :	3
265 *см*	53 *см*	3	1 р. 45 к.
250		1 35 коп.	
15		1 20	
15		15	
		15	

Разделим еще 4 руб. 35 коп. на 3 равные части. Для этого разделим 4 руб. на 3, получим в каждой части по 1 руб. и 1 руб. в остатке. Раздробим 1 руб. в копейки, получим 100 коп. К 100 коп. прибавим 35 коп., получится 135 коп. Разделим 135 коп. на 3 равные части и т. д.

НУМЕРАЦИЯ И ПИСЬМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЯ В ПРЕДЕЛАХ МИЛЛИОНА.

В предшествующих концентрах действия выполнялись главным образом устно. В пределах тысячи начат переход к письменным действиям. В пределах миллиона действия выполняются письменно. Об отличии устных и письменных действий см. стр. 221. Не следует думать, что с началом этого концентра

учащиеся вычисляют только письменно: на каждом уроке необходимо хотя бы немного упражнять их в устном вычислении.

Содержание настоящего концентра следующее:

а) Нумерация и четыре арифметических действия, при этом умножение ограничено случаем трехзначного множителя, а деление случаем двузначного делителя.

б) Раздробление, превращение именованных чисел и действия над именованными числами.

В пределах миллиона вырабатываются механизмы арифметических действий. При этом переход к сокращенным записям арифметических действий совершается постепенно, при полном понимании учащимися этого процесса.

В итоге учащиеся должны вполне' овладеть механизмами арифметических действий, выполняя их осмысленно, без ошибок, порядливо и красиво.

Нумерация.

Замечания об устной и письменной нумерации. Термины устной и письменной нумерации могут и не быть известны учащимся на третьем году, но существо того и другого вида нумерации ученик должен знать.

Обучая детей устной нумерации, мы ставим следующие цели:

а) Твердое знание разрядных единиц и соотношений между ними.

б) Изучение состава числа.

в) Приобретение навыка в счете или назывании чисел последовательно одного за другим.

Обучая детей письменной нумерации, мы ставим себе главную методическую задачу — научить их записывать числа на основе поместного принципа нумерации (стр. 15).

О нумерации в пределах миллиона сделаем существенное замечание. Прохождение подряд всех случаев нумерации для детей утомительно. Поэтому выгоднее нумерацию проходить совместно с действиями сложения и вычитания в такой последовательности:

1. Устная и письменная нумерация четырехзначных чисел; сложение и вычитание в пределах десятка тысяч.

2. Устная и письменная нумерация пятизначных чисел и соответствующие случаи сложения и вычитания.

3. Устная и письменная нумерация шестизначных чисел, сложение и вычитание в пределах миллиона.

4. Общие выводы, относящиеся к нумерации.

В настоящем курсе методики арифметики нумерация изложена отдельно от действий сложения и вычитания ради большей ясности и обозримости ее для читателя.

Порядок изучения устной и письменной нумерации.

Детям уже известна нумерация в пределах тысячи, иначе говоря, нумерация первого класса, а именно:

а) Они имеют ясное, конкретное понятие о единице, десятке, сотне и тысяче.

б) Умеют составить число из разрядных чисел и разложить его на разрядные числа.

в) Умеют считать от 1 до 1000.

Числа любого класса составляются из разрядов так же, как число первого класса. Таким образом твердое знание нумерации первого класса будет служить основой для изучения нумерации многозначных чисел.

В виду этого здесь принят такой порядок изложения нумерации:

Устная нумерация тысяч (второго класса).

1. Разрядные единицы — тысяча, десяток тысяч, сотня тысяч, миллион.
2. Состав чисел.
3. Счет тысячами.

Письменная нумерация тысяч.

1. Запись чисел.
2. Чтение чисел.

Устная нумерация любых чисел до миллиона.

1. Состав чисел.
2. Счет единицами.

Письменная нумерация любых чисел до миллиона.

1. Запись чисел.
2. Чтение чисел.

Пособием могут служить классные счеты, еще лучше счеты с вертикальными проволоками в виде абака (стр. 44) и нумерационная таблица в тетради (см. прилагаемый чертеж).

Устная нумерация тысяч. В изучении устной нумерации мы различаем три ступени: 1) знакомство с разрядными единицами числа, 2) усвоение состава числа и 3) счет тысячами.

Тысячи			Единицы		
Сотн. тыс.	Дес. тыс.	Един. тыс.	Сотн.	Дес.	Един.

1. Разрядные единицы. Ведя урок нумерации, трудно обойтись без некоторых терминов, например, без слова разряд или разрядное число. Но полное учение о классах и разрядах с соответствующей терминологией лучше отнести на четвертый год, на котором будет изучаться нумерация чисел любой величины.

Образование разрядных единиц обнаруживается при их счете.

Будем считать — одна единица, две единицы и т. д., откладывая соответствующее число шариков на счетах. Насчитав *десять единиц,* заменяем их *одним десятком*, при этом 10 шариков убираем, а один шарик на второй проволоке откладываем:

10 единиц = 1 десятку.

Подобным же образом насчитываем 10 десятков и заменяем их одной сотней и т. д. Составляем таблицу:

10 десятков	=	1 сотне
10 сотен	=	1 тысяче
10 тысяч	=	1 десятку тысяч
10 десятков тысяч	=	1 сотне тысяч
10 сотен тысяч	=	1 миллиону.

Места разрядов на счетах или в нумерационной таблице и соотношение между разрядными единицами должны быть хорошо усвоены. Для этой цели служат упражнения:

а) Отложить на счетах (записать в нумерационной таблице) 1 тыс.; 3 тыс.; 1 дес. тыс.; 5 дес. тыс.; 1 сотн. тыс.; 6 сот. тыс. и т. п.

б) Назвать число, отложенное учителем на четвертой, пятой или шестой проволоке.

в) Ответить на вопросы: сколько сотен в 1 тыс.? в 3 тыс.? Сколько тысяч в 1 дес. тыс.? в 5 дес. тыс.? Сколько десятков тысяч в 1 сотне тыс.? в 6 сотн. тыс.? и т. п.

2. Состав числа. Когда разрядные единицы — тысяча, десяток тысяч и сотня тысяч усвоены, можно показать, как составляются из них числа и как эти числа называются. Для этого служат два рода упражнений: 1) учитель изображает разряды числа на счетах, ученик называет каждый разряд в отдельности и все число; 2) учитель называет число, а ученик разлагает его на разряды и откладывает их на счетах.

Пусть отложено на счетах:

2 шарика на 6-ой проволоке				
3	„	„	5 „	„
3	„	„	4 „	„

Какое число изображают 2 шарика на 6 проволоке? 3 шарика на 5 проволоке? 4 шарика на 4 проволоке?

Какое число отложено на всех трех проволоках?

То же число ученики изображают у себя в тетрадях в нумерационной таблице (стр. 262).

Состав чисел можно изучать в такой последовательности: 4 т., 20 т., 24 т., 300 т., 320 т., 405 т., 647 т., 1 миллион и др.

Проделав ряд таких упражнений, необходимо предлагать и обратные требования — называемые числа откладывать на счетах. Например: отложим на счетах 46 тысяч. Сколько в этом числе десятков тысяч? Сколько тысяч? На какой проволоке откладывают 4 десятка тысяч? На какой — 6 тысяч? Отложить это число на счетах. Записать в таблице.

Для усвоения состава числа ученикам даются упражнения:

а) Назвать число, в котором столько-то сотен тысяч, десятков тысяч и тысяч.

б) Сказать, сколько в данном числе сотен тысяч, десятков тысяч и тысяч.

в) Назвать число, отложенное на счетах или записанное в таблице.

г) Отложить на счетах или записать в таблице названное число.

Числа, состоящие из круглых тысяч, не могут быть наглядно представлены так, как числа, меньшие тысячи. Поэтому их надо сделать конкретными, реальными при помощи примеров или задач, взятых из жизни, близкой детям. Например:

В таком-то городе 18 тыс. жителей, а в другом 25 тыс. жителей. На сколько больше жителей во втором городе?

Чернорабочий получает в год зарплату 2 тыс. рублей, а мастер вдвое больше. Сколько тысяч рублей зарабатывает за год мастер?

В задачнике, примерно, 150 тыс. букв, а в книге для чтения их втрое больше. Сколько букв в книге для чтения?

3. С ч е т т ы с я ч а м и. Учащиеся должны научиться называть последовательно одно число за другим, начиная с данного числа. Полезно называемые числа откладывать на счетах.

Учт. Считай тысячами, начиная с 95 тыс.

Учк. 95 тыс., 96 тыс., 97 тыс.... 100 тыс., 101 тыс...

Учт. Считай тысячами, начиная с 995 тыс.

Учк. 995 тыс., 996 тыс., 997 тыс., 998 тыс., 999 тыс., 1000 тыс. или один миллион.

Письменная нумерация тысяч (чисел второго класса). Письменная нумерация состоит: 1) из *записи* чисел и 2) из *чтения* чисел.

1. З а п и с ь ч и с е л. Ученики научились называть числа, отложенные на счетах и читать их по таблице. Перейдем к записи чисел вне таблицы. Записывая числа, будем держаться такого порядка: а) 1000, 4000; б) 10 000, 30 000, 45 000; в) 100 000, 500 000, 420 000, 325 000, 406 000, 1 000 000 и др. Отложим на счетах 3 тыс., запишем их в таблице. Перепишем это число в тетрадь: цифра 3 занимает на счетах 4 место, если считать от правой руки к левой. Это же место она должна занять и в записи, а на первом, втором и третьем местах напишем по нулю.

Точно так же записывают и другие числа, состоящие из круглых тысяч.

Для записи необходимо предлагать не только отвлеченные числа, но и реальные, например:

В городе 15 000 жителей; рабочий за год выработал 2 000 часов; рабочий за год заработал 4 000 руб. и др.

Желательно, чтобы ученики сопоставляли записи: 3 и 3 000; 25 и 25 000; 305 и 305 000; 247 и 247 000.

Сравните, одинаковыми ли цифрами записаны 3 ед. и 3 тыс.? Какая разница между записью 3 ед. и 3 тыс.? и т. д. Разница заключается в том, что к числу тысяч приписаны три нуля.

Чтобы вывести правило о записи чисел, состоящих из круглых тысяч, полезно сопоставить записи:

5 тысяч	400 тысяч	250 тысяч
5 000	400 000	250 000
80 тысяч	13 тысяч	325 тысяч
80 000	13 000	325 000

5, 80, 400, 13, 250, 325 — число тысяч.

Чтобы записать число, составленное из тысяч, пишут сперва число тысяч, а затем приписывают к нему справа три нуля.

2. Чтение чисел. Учитель пишет на доске число 7 000. На первом, втором и третьем местах стоят нули: это значит, что в числе нет единиц, десятков и сотен. На четвертом месте стоит цифра 7, которая обозначает семь тысяч. Записано число — семь тысяч. Так же читаются и другие числа: 2 000, 5 000, 10 000, 80 000, 36 000, 100 000, 540 000, 427 000, 109 000, 1000 000.

Устная нумерация любых чисел в пределах миллиона. Изучение устной нумерации проходит два этапа: 1) изучение *состава числа* и 2) *счет единицами.*

1. Состав числа. При изучении состава числа требуется: а) по данным разрядам числа назвать все число; б) данное число разбить на разряды. С помощью этих двух вопросов изучается по порядку состав чисел: четырехзначных, пятизначных и шестизначных.

Примеры:

а) На счетах отложены:	Называем все число:
2 шар. на 4-ой проволоке,	2 т. 3 с. 1 д. 7 ед.,
3 „ на 3 „ „	всего – две тысячи
1 „ на 2 „ „	триста семнадцать.
7 „ на 1 „ „	

За этим упражнением следует ряд аналогичных упражнений, относящихся также к составу четырехзначного числа.

б) Учитель называет число, например, пять тысяч триста сорок шесть. Ученик откладывает на счетах сперва 5 тыс., затем 346 ед. Сколько в этом числе тысяч, сотен, десятков, единиц?

После ряда аналогичных вопросов, относящихся к четырехзначным числам, предлагаются вопросы, относящиеся к составу пятизначных и шестизначных чисел.

Образцы упражнений, относящиеся к составу числа:

а) Назвать число, разрядные числа которого даны (отлажены на счетах или записаны в таблице).

б) Изобразить на счетах или в таблице число, разрядные числа которого записаны цифрами и словами: например, 2 дес. тыс.; 7 тыс. 5 сот. 3 ед. Назвать это число.

в) Отложить на счетах или записать в таблице названное число, например, 32 тыс. 408 ед.

Обобщаем: числа, которые мы откладывали на счетах, состоят из тысяч и единиц. Тысячи мы откладывали на 4-й, 5-й и 6-й проволоках, а единицы на 1-й, 2-й и 3-й проволоках.

2. Счет единицами. Чтобы научить детей называть последовательно числа одно за другим, можно воспользоваться следующим приемом: назвать число, отложить его на счетах и затем предложить продолжать счет, прибавляя по одному.

Учт. Отложи на счетах 9996. Считай, прибавляя по одному.

Учк. 9 996, 9 997, 9 998, 9 999.

Назвать следующее число учащиеся обыкновенно затрудняются. Прочтем еще раз последнее из названных чисел: 9 тысяч 999. Прибавив к 999 одну единицу, получим одну тысячу; одна тысяча да 9 тысяч будет 10 000. Назвав следующее за 9999 число, вернемся назад и еще раз пересчитаем — 9 996, …, 9 999, 10 000, 10 001 и т. д. Следует упражняться в счете, обращая внимание на наиболее трудные переходы — через тысячу и через сотню.

Письменная нумерация любых чисел до миллиона. Изучение письменной нумерации состоит: 1) из записи чисел и 2) из чтения чисел.

1. Запись чисел. Изображение чисел на счетах или в нумерационной таблице и запись чисел основывается на одних и тех же правилах; поэтому при записи чисел будем пользоваться предварительно счетами и таблицей. Надо отложить на счетах число 3 тыс. 175 ед. (откладывают). Запишем это же число в таблицу. Разложим его на разряды: 3 тыс. 1 сотн. 7 дес. 5 ед. Запишем его в тетради: 3 тысячи на 4 месте, 1 сотню на 3 месте, 7 десятков на 2 месте и 5 единиц на 1 месте. Получим запись: 3 175.

Запись числа начинаем, таким образом, с высших разрядов.

Так же производим разбор состава других чисел, которые затем откладываем на счетах и записываем сперва в нумерационной таблице, а за-

тем без нее. Необходимо придерживаться следующего порядка: записывать сначала 4-значные, затем 5-значные и, наконец, 6-значные числа.

В первых примерах производим подробный разбор числа, разлагая его на разряды. Но затем ограничиваемся разложением числа *на тысячи и единицы.*

Для записи надо предлагать числа, разнообразные по своему составу, например:

а) Четырехзначные числа: 4 237, 5 230, 6 200, 4 307, 1 025, 3 004, 8 050 и др.

б) Пятизначные числа: 52 384, 30 845, 36 830, 48 700, 17 036, 23 006, 40 305 и др.

в) Шестизначные числа и миллион: 145 874, 250 436, 406 784, 500 654, 286 075, 184 704, 736 800 и др.

2. Чтение чисел. Прочтем число 5 037. Это число состоит из следующих разрядов:

Цифра 5 стоит на 4-м месте и изображает 5 т.
„ 0 „ на 3 „ „ и показывает, что сотен нет.
„ 3 „ на 2 „ „ и изображает 3 д.
„ 7 „ на 1 „ „ „ „ 7 ед.

Записано 5 тыс. 37 ед. Так же читаются и другие числа.

Разобрав подробно несколько чисел, можно затем при чтении чисел разлагать их только на тысячи и единицы.

В итоге ряда упражнений, учащиеся должны приобрести следующие познания о письменной нумерации:

Единицы числа пишутся на первом месте справа.
Десятки „ „ на втором „ „
Сотни „ „ на третьем „ „
И т. д.

При записи чисел, их можно разлагать только на единицы и тысячи; тысячи пишутся на 4-ом, 5-ом и 6-ом местах, а единицы — на 1-ом, 2-ом и 3-ьем местах.

Записывая число, состоящее из тысяч и единиц, пишут сперва число тысяч, а затем число единиц. Когда в числе нет какого-либо разряда, то на его месте пишут нуль.

Преобразование десятичного состава чисел. Для действий над целыми числами имеют важное значение два взаимообратные преобразования в составе числа:

1. Превращение разрядных единиц числа. Например:

а) Сколько всего сотен в числе 3 000?
б) „ „ „ „ „ 3 475?
в) „ „ „ „ „ 148 дес?

2. Раздробление разрядных единиц числа. Например?

а) Сколько всего единиц заключается в числе 427 дес?

б) Раздробить в единицы число 34 сотн. 70 един.

в) Раздробить в десятки число 32 сотн. 5 дес.

Разберем подробнее эти две группы упражнений.

1. Урок начнем с легких вопросов. Сколько десятков в числах 50; 350? Сколько сотен в числах 700; 2700; 40 дес.; 48 дес.; 148 дес.? Сколько тысяч составляют 20 сотен? Сколько тысяч и сотен составляют 25 сотен?

Переходим к более трудным случаям. Узнаем, сколько всего десятков в числе 7356.

В тысяче	— 100 десятков,	в 7 тысячах	—	700	десятков.
В сотне	— 10 „	3 сотнях	—	30	„
		да еще	—	5	„
		Всего	—	735	десятков.

Таким же образом находим, сколько десятков в числах: 1 000, 3 000, 4 800, 5 870, 7 348, 10 000, 20 000, 35 000, 48 700,86 750, 75 425.

Делаем вывод: чтобы узнать, сколько в числе десятков, надо откинуть в нем последнюю справа цифру.

На основании вывода определяем число десятков в числах: 100 000, 300 000, 480 000, 735 000, 728 400 и др.

Так же точно приходим к выводу: чтобы узнать, сколько в числе сотен, надо откинуть в нем две последние справа цифры.

2. Вторую группу упражнений начнем также с простых вопросов. Сколько единиц в числах 7 дес.; 27 дес.; 5 сотн.; 25 сотн.; 37 сотн. 5 дес.; 24 сотн. и 30 един?

Раздробить в десятки 2 сотн. 5 дес., 15 сот. 2 дес. Раздробить в сотни 3 тыс., 3 тыс. 2 сотн. и т. п.

Переходим к планомерному выводу правила.

В числе	30 —	3 десятка;	значит	3 десятка	то же, что	30
„ „	420 —	42 „	„	42 „	„ „ „	420
„ „	7520 —	752 „	„	752 „	„ „ „	7520

Обобщение: чтобы записать 752 дес., мы вместо слова „десяток“ пишем нуль. И т. д.

Переходим к записи данного числа сотен.

Письменное сложение и вычитание в пределах миллиона.

Слагаемые и сумма. На третьем году можно сообщить учащимся названия тех чисел, над которыми производится арифметическое действие, и того числа, которое при этом получается. Давая эти названия, необходимо

выяснить роль каждого числа в арифметическом действии. Это удобно сделать на задачах и примерах.

В первом классе 38 учащихся, во втором — 36, в третьем — 32, в четвертом — 26. Сколько учащихся во всех четырех классах? Задачу решаем сложением:

$$38 + 36 + 32 + 26 = 132.$$

Числа 38, 36, 32 и 26 соединяются в одно число или складываются, поэтому эти числа называются *слагаемыми*. Новое число 132 содержит столько единиц, сколько их во всех числах вместе, и называется *суммой*.

Вводя на третьем году обучения термины сложения и объяснения их, мы добиваемся того, чтобы ученики лучше уяснили себе понятие сложения. Сложить два числа 145 и 237 — это то же, что соединить их в одно число — 382, которое заключает в себе поэтому столько единиц, сколько их содержится в обоих слагаемых.

Зная, что сумма получается при сложении, учащиеся должны понимать требование — найти сумму двух чисел, например, найти сумму чисел 87 и 118.

Для того, чтобы названия данных чисел и результаты арифметического действия были хорошо усвоены, надо к ним возвращаться неоднократно при решении задач и примеров.

Сложение. В пределах миллиона желательны и возможны следующие случаи устного (вернее — полуписьменного) сложения:

а) Сложение круглых тысяч (3000 + 5000, 8000 + 7000, 15000 + 3000, 15000 + 5000, 18000 + 12000).

б) Сложение чисел двух классов без перехода через тысячу (3280 + 500, 4380 + 20, 2080 + 160, 2500 + 1300, 998 + 2, 9998 + 2, 9990 + 10, 19995 + 5).

в) Сложение чисел с переходом через тысячу (800 + 500, 1800 + 700, 2700 + 1500, 999 + 5, 9997 + 8).

Глядя на запись чисел в книге или на доске, учащиеся производят сложение устно, записывая действие „в строчку“. В этом смысле указанные выше случаи сложения были названы полуписьменными.

Эти упражнения полезны для понимания письменного сложения; однако надо соблюдать осторожность в выборе чисел для устного сложения, чтобы не обременить внимания учащихся и не внушить им равнодушия к устным вычислениям.

С письменным сложением трехзначных чисел дети знакомы. Они успели уже усвоить основную мысль сложения чисел: надо складывать единицы с единицами, десятки с десятками и т. д. Этот способ сложения необходимо распространить и на четырехзначные, пятизначные и шестизначные числа.

Упражнение располагаем в порядке возрастающей трудности:

а) Сумма разрядных чисел меньше 10 (3 412 + 6 533, 5 413 + 522, 78 113 + + 1 775, 238 100 + 21 525, 30 027 + 8 032, 72 300 + 15 200).

б) Сумма разрядных чисел равна 10 — в одном, в двух, трех и более разрядах (3 573 + 217, 30 425 + 12 383, 3 405 + 32 602, 4 587 + 1 013, 35 482 + + 2 518, 120 356 + 59 652).

с) Сумма разрядных чисел больше 10 — в одном, двух, трех разрядах (3 457 + 2 138, 25 783 + 13 175, 3 458 + 288, 35 687 + 23 773, 275 043 + 285 089).

д) Число слагаемых больше двух (3 480 + 345 + 1 905, 17 845 + 2 023 + + 28 022).

Сложим два числа: 35 027 и 8 043. Ученики должны объяснить сложение так. Подпишем одно число под другим так, чтобы 3 ед. стояли под 7 ед., 4 дес. под 2 дес. и т. д.

$$\begin{array}{r} 35\,027 \\ +\quad 8\,043 \\ \hline 43\,070 \end{array}$$

7 ед. да 3 ед. — 10 ед., или 1 д. Единиц нет, на их месте пишем нуль. Один десяток относим к десяткам: 1 д. да 2 д. — 3 д., да 4 д. — 7 д. (пишем). Сотен нет, запишем на их месте нуль и т. д.

Когда механизм сложения будет твердо усвоен, речь, сопровождающая его, может быть упрощена таким образом: 7 да 3 — 10, нуль пишу, а 1 — в уме; 1 да 2 — 3, да 4 — 7, 7 пишу; пишу еще нуль; 5 да 8 — 13, 3 пишу, 1 в уме и т. д.

Полное правило сложения многозначных чисел чрезвычайно многословно. Коротко оно может быть сформулировано так:

Чтобы сложить два числа, складываем единицы одного числа с единицами другого, десятки с десятками и т. д.

Необходимо приучить детей проверять результат сложения, производя сложение в другом порядке. При этом нет необходимости переписывать слагаемые.

Уменьшаемое, вычитаемое и остаток. Роль чисел, которые даются при вычитании, и результата вычитания выясняются на задачах и примерах.

У газетчика было 100 газет. Он продал 38 газет. Сколько газет у него осталось? Задачу решаем вычитанием: 100 г. — 38 г. = 62 г. От 100 мы отняли 38. Число 100 уменьшилось, это число называется *уменьшаемым*. Мы вычли 38. Число 38 называется вычитаемым. Осталось 62 газеты. Число 62 называется *остатком*.

100 г.	—	38 г.	=	62 г.
Уменьшаемое.		Вычитаемое.		Остаток.

Надо решить несколько задач и примеров на вычитание, выясняя для каждого из них роль уменьшаемого, вычитаемого и остатка.

Разница между числами 100 и 38 равна 62, поэтому число 62 может быть названо *разностью*.

Вычитание. В пределах миллиона возможны следующие случаи устного вычитания, которые будут подготовительными упражнениями к письменному вычитанию.

а) Вычитание круглых тысяч (8 000 − 3 000, 15 000 – 8 000, 20 000 – 12 000, 35 000 – 18 000).

б) Вычитание без перехода через тысячу (3 700 − 500, 3 700 − 60, 3 700 − 160, 2 800 – 1 300, 10 000 − 3, 20 000 − 10).

в) Вычитание с переходом через тысячу (1 500 − 800, 2 200 − 600, 4 200 – – 1 500, 1 002 − 5, 100 003 − 8).

С механизмом вычитания учащиеся уже познакомились раньше.

Понятия, необходимые для вычитания многозначных чисел, у них имеются. Поэтому остается решать примеры и задачи на вычитание с подробными объяснениями. Расположить эти упражнения можно в следующем порядке:

а) Разрядные числа уменьшаемого не меньше соответствующих разрядных чисел вычитаемого (9 754 − 3 231, 75 897 − 3 243, 348 956 − 120 034, 3 874 – – 1 372, 54 005 − 13 002).

б) В уменьшаемом отсутствуют некоторые разряды, которые имеются в вычитаемом (3 750 − 1 237, 28 405 − 14 262, 785 048 − 123 625, 7 500 − 1 245, 28 007 − 14 362, 750 000 − 231 427, 36 000 − 2 345, 10 000 − 3 456).

в) Некоторые разрядные числа уменьшаемого меньше соответствующих разрядных чисел вычитаемого (7 892 − 3 455, 28 725 −·3 482, 657 486 − 35 542, 8 421 − 3 256, 78 329 − 14 557, 8 720 − 3 468, 8 702 − 3 468, 58 305 − 26 773, 58 035 − 26 773, 67 300 − 15 844).

Сделаем вычитание: 34 080 − 7 025. Подпишем одно число под другим так, чтобы 5 ед. стояли под нулем, 2 д. под 8 д. и т. д.

$$\begin{array}{r} _{-}\,34\,080 \\ 7\,025 \\ \hline 27\,055 \end{array}$$

Начнем вычитание с единиц: 5 ед. нельзя отнять от нуля. Возьмем из 8 десятков 1 д. или 10 ед. Десять единиц без 5 ед. — 5 ед. (пишем). 7 д. без 2 д. — 5 д. (записываем). Сотен нет, пишем 0 и т. д. Такое объяснение действия ученики усваивают постепенно. Сперва учителю приходится задавать наводящие вопросы, обращаться с вопросами к классу, но скоро ученики овладевают надлежащей речью и ведут объяснения более или менее самостоятельно.

Чтобы ученики более сознательно относились к механизму вычитания, надо остановить их внимание на следующем: в нашем примере уменьшаемое 34 080. Так как 5 ед. нельзя было отнять от нуля и 7 тыс. от 4 т., мы взяли от 8 десятков 10 ед. и от 3 десятков тысяч — 10 т. Тогда получили число, в котором 2 д. тыс. 14 т. 7 д. и 10 ед. От этого числа легко отнять 7 025.

Правило вычитания может быть выведено в сокращенной форме: чтобы вычесть из одного числа другое, вычитаем единицы второго числа из единиц первого, десятки из десятков и т. д.

Проверка вычитания. Если обучение арифметике построено на верных научно-методических основах, то ученики хорошо усваивают представление о связи между вычитанием и сложением задолго до того времени, когда они научатся эту связь выражать при помощи правил и определений. Так, если ученик знает уже, что 8 + 7 = 15, то он знает также, что 15 − 7 = 8 и 15 − 8 = 7. Приступая к проверке вычитания, необходимо эти представления учеников оживить с помощью примеров и задач. Решим ряд примеров:

а) 75 − 26, 26 + 49; 100 − 33, 67 + 33; 120 − 40, 80 + 40; и т. д.

Если от 75 отнять 26, то получится 49. Если же наоборот 49 прибавить к 26, то получится 75 и т д.

б) Надо решить примеры: 520 − 150 и 370 + 150. Решив первый пример, написать ответ во втором примере, не производя вычисления.

в) В книге 72 страницы. Ученик прочел 28 страниц. Сколько страниц осталось прочитать? 72 стр. − 28 стр. = 44 стр.

Ученик прочел из книги 28 страниц, осталось же ему прочесть еще 44 страницы. Сколько страниц в книге?

Решив эти две задачи, делаем такое заключение: если от 74 отнять 28, то получится 44. Наоборот, если к 28 прибавить 44, то получится 72.

После ряда примеров и задач, подобных тем, какие здесь приведены, в сознании учеников образуется вполне отчетливое понятие о соотношении между сложением и вычитанием.

Возникнет вопрос — надо ли добиваться того, чтобы ученики на третьем году формулировали это соотношение в виде правила? Нужды в этом нет: эти вопросы подлежат изучению на четвертом году.

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r}411\\136\end{array}\\ \hline 275\end{array}$$

Приступим к проверке вычитания. Отнимем 136 от 411, получим остаток 275. Прибавим остаток 275 к числу 136, которое мы отняли: сколько должно получиться? Проверьте! Ученик складывает числа 136 и 275, пользуясь той же записью. Так проверяют, верно ли сделано вычитание.

Можно дать ученикам несколько решенных примеров на вычитание с верными и неверными ответами, которые они должны проверить.

В какой форме следует обобщить правило проверки вычитания? Возможны две формы: конкретная и отвлеченная.

Конкретно: к вычитаемому 136 прибавим остаток 275. Если вычли верно, то получится уменьшаемое 411.

Отвлеченно: Чтобы проверить вычитание, надо к вычитаемому прибавить остаток; должно получиться уменьшаемое.

На третьем году обучения можно ограничиться первой формой выражения этого правила (стр. 32).

Умножение в пределах миллиона.

Множимое, множитель и произведение. На первом и на втором году обучения приходилось много раз рассматривать произведение, как сумму равных слагаемых, а умножение, как сокращенное сложение. Умножение в понятии учащихся не успело оторваться еще от сложения. Поэтому достаточно одного примера или задачи, чтобы напомнить им о связи этих действий.

Работник на станке обтачивает в день 45 колес. Сколько колес успеет он обточить за 5 дней? Эту задачу можно решить сложением.

45 к. + 45 к. + 45 к. + 45 к. + 45 к. = 225 к.

Так как в задаче этой все слагаемые одинаковы, то сложение можно заменить умножением. От этого сократится и запись, и вычисление.

45 кол. × 5 = 225 кол.

45 мы взяли 5 раз и получили 225. Иначе: 45 *умножили* на 5 и получили 225.

Число 45 называется *множимым*, 5 — *множителем*, 225 — *произведением*.

45	×	5	=	225
Множимое		Множитель		Произведение

Учащиеся решают еще 2—3 примера и задачи на умножение, называя каждый раз все три числа этого действия. Заучивать определение каждого из этих названий на третьем году нет необходимости. Ученики должны только разобраться в этих названиях: число 45 мы умножаем, множим: оно называется *множимым*. Число 5 показывает, сколько раз надо повторить 45; 45 надо на 5 множить. Число 5 — *множитель*. От этого получается, „производится" число 225, которое называется *произведением*.

Термины умножения будут нередко встречаться в течение года. Чтобы учащиеся не забывали их, полезно при решении примеров или задач о них напоминать.

Умножение многозначных чисел. Умножение многозначных чисел в пределах миллиона разбивается на случаи, когда множитель однозначное число, десять, круглые десятки, двузначное число, сто, круглые сотни, трехзначное число.

Короткие, изящные записи умножения вырабатываются генетически, постепенно. Объяснения умножения сперва подробны, обстоятельны, и лишь мало-по-малу схематизируются и приобретают краткую стереотипную, отвлеченную форму. Окончательная форма записи и объяснения закрепляется многочисленными упражнениями.

Задачи необходимо подбирать разнообразные по содержанию, чтобы учащиеся на них приучались правильно выбирать действие умножения. Следует

обращать внимание на задачи прикладные, заимствованные из области природоведения, труда, техники.

Сделаем еще весьма существенное замечание: проведя урок, посвященный одному из указанных случаев умножения, надо обязательно подвести итоги урока в виде некоторых обобщений. Например:

Сегодня на уроке мы умножали многозначные числа на однозначные. При умножении на однозначное число, каждый разряд множимого мы умножаем на однозначное число, начиная с единиц.

Или:

Сегодня на уроке мы умножали многозначные числа на двузначные. При умножении на двузначное число, мы умножали сперва на единицы этого числа, затем на десятки. Потом оба неполные произведения складывали.

Эти обобщения делаются учениками с помощью учителя.

Умножение на однозначное число. В пределах миллиона возможны следующие случаи устного умножения, которые должны служить подготовительными упражнениями к письменному умножению.

а) Умножение круглых тысяч на однозначное число (2000 × 7; 20000 × 8; 5 дес. тыс. × 4; 3 сот. тыс. × 3; 25000 × 4).

б) Умножение чисел двух классов без перехода через тысячу (1200 × 3; 3400 × 2; 3025 × 2; 2180 × 3; 1500 × 2).

в) Умножение с переходом через тысячу (400 × 6; 1500 × 4; 1400 × 3).

Приступая к умножению на однозначное число, ученик должен владеть следующими понятиями и навыками:

1. Знать таблицу умножения.

2. Уметь разложить число на десятичные числа. Дано число 35 027. Сколько в этом числе десятков тысяч, тысяч, десятков и единиц? Или иначе: назовите разрядные числа в этом числе.

3. Уметь выделять из числа указанные десятичные единицы (стр. 267). Сколько сотен составляют 3 т. 5 с.? Сколько тысяч и сотен составят 42 сотни? И т. д.

4. Уметь умножить двузначное или трехзначное число на однозначное, разбивая множимое число на разрядные числа (чтобы умножить 37 на 4, надо умножить 30 на 4, затем 7 на 4 и т. д.).

Начнем урок письменного умножения с повторения умножения в пределах тысячи — с простейшего случая, когда при умножении каждого разряда трехзначного числа получаются числа, меньшие десятка: 233 × 3; 143 × 2 и др. Перейдем затем к большим числам: 34 021 × 3. Сделаем умножение письменно. Во множимом — 3 д. т., 4 т., 2 д., 1 ед. Одну единицу возьмем 3 раза, получим 3 (пишем); 2 д. возьмем 3 раза, получим 6 д. и т. д.

Умножим устно 135 на 5. Для этого 100 умножим на 5, получим 500; 30 умножим на 5, получим 150; 5 — на 5, получим 25. Всего: 500 + 150 + 25 = = 675.

Мы могли бы начать умножение с единиц, тогда изменился бы порядок сложения: 25 + 150 + 500 = 675. Произведение получилось бы то же самое.

Умножим *письменно* 135 на 5:

$$\begin{array}{r} 135 \\ \times\ \ 5 \\ \hline 675 \end{array}$$

По 5 единиц 5 раз — 25 единиц; 5 единиц пишем, а 2 десятка относим к десяткам. По 3 десятка 5 раз — 15 десятков, да еще 2 десятка — 17 десятков; 7 десятков пишем, а одна сотня в уме.

По 1 сотне 5 раз — 5 сотен, да 1 сотня — 6 сотен; 6 сотен записываем. Всего 675.

Обыкновенно говорят короче: пятью пять — 25, 5 пишем, а 2 в уме. Трижды пять — 15, да 2 — 17, 7 пишем, а 1 в уме, и т.д. От такого краткого стереотипного объяснения надо некоторое время воздержаться, пока учащиеся хорошо поймут и твердо усвоят умножение на однозначное число. Тогда допустимо будет краткое объяснение умножения.

Продолжаем решать примеры и задачи, в которых при умножении *одного* из разрядов получается число, большее десяти: 3 327 × 2; 2 308 × 3; 3 482 × 2; 12 832 × 3; 12 821 × 4.

Затем переходим к примерам: с любым множимым, без нулей в произведении — 3 288 × 2; 12 783 × 3; 23 775 × 3; с любым множимым с нулями в произведении — 475 × 6; 3 608 × 5; 2 257 × 8; 21 750 × 8; 11 251 × 8; 52 525 × 4; 40 008 × 2.

Следует решить несколько примеров и задач с перестановкой сомножителей. Напомним, что при умножении 3 × 36 и 36 × 3 произведения получаются одинаковые. Так же 5 × 24 и 24 × 5; 7 × 30 и 30 × 7 и т. п.

Чтобы умножить 6 на 375, удобно 375 умножить на 6. Решим задачу: в школу прислали 1 435 тетрадей, ценой в 5 коп. каждая. На какую сумму прислали тетрадей?

Запись умножения:

$$\underline{\text{5 коп.} \times 1\,435 = 7\,175 \text{ коп.} = 71 \text{ руб. } 75 \text{ коп.}}$$

$$\begin{array}{r} 1\,435 \\ \times\qquad \\ 5 \\ \hline 7\,175 \end{array}$$

Когда учащиеся приобретут навык в умножении, то можно ограничиться записью 5 коп. × 1 435, но умножать при этом мысленно 1 435 на 5:

$$\begin{array}{r} \underline{\text{5 коп.} \times 1\,435} \\ 7\,175 \text{ коп.} \end{array}$$

Недопустима следующая запись:

$$\times\begin{array}{r}1\,435\text{ т.}\\5\\\hline 7\,175\text{ коп.}\end{array}$$

Умножение на 10. Правило умножения на разрядную единицу, в частности, на 10 считают легким и формулируют так: чтобы умножить число на 10, достаточно приписать к нему справа нуль. Действительно, это правило запоминается легко; нетрудно действие умножения на 10 выполнить механически. Но чем быстрее ученик заучивает правило, чем менее у него поводов рассуждать, тем дальше он от понимания того, что он делает. Вот почему в пределах тысячи мы не сообщили ученику правила умножения на 10, а ограничились следующим выводом: при умножении на 10 в произведении получается столько десятков, сколько во множимом единиц.

При изучении умножения на 10 в пределах миллиона сообщение правила становится своевременным. Урок умножения на 10 начинаем с повторения умножения на 10 однозначных и двузначных чисел (стр. 247). Дети решают ряд примеров, записывая действия в строчку. Получается табличка такого рода:

5 × 10 = 50	14 × 10 = 140
7 × 10 = 70	27 × 10 = 270
9 × 10 = 90	56 × 10 = 560

В каждом решенном примере сравниваем множимое и произведение. Устанавливаем, что числа эти отличаются одно от другого только тем, что у произведения справа стоит нуль.

Теперь остается показать, что появление нуля — не случайное, что, приписывая к числу справа нуль, мы тем самым увеличиваем его в 10 раз.

Остановимся подробнее на последнем из примеров. В числе 56 было 6 единиц, после умножения на 10 стало 6 десятков

„ 5 десятков „ „ „ 10 „ 5 сотен.

Каждое разрядное число множимого стало больше в 10 раз, и все число 56 увеличилось в 10 раз.

Выведем правило: чтобы умножить число на 10, достаточно приписать к нему справа нуль.

Решим еще примеры: 100 × 10; 300 × 10; 370 × 10; 475 × 10; 506 × 10; 1000 × 10; 5000 × 10; 5 400 × 10; 4 725 × 10; 8 002 × 10 и т.п.

Умножая по правилу, будем иногда обращать внимание детей на то, что при умножении числа на 10 каждый разряд множимого увеличивается в 10 раз.

Кроме того необходимо решить несколько пар примеров с перестановкой: 37 × 10 и 10 × 37; 245 × 10 и 10 × 245 и т. п.

Умножение на круглые десятки. Основу умножения на круглые десятки составляет, так называемый, сочетательный закон умножения (стр. 22). На втором и третьем году обучения ученикам случалось заменять одно умножение двумя последовательными умножениями. Например: 25 × 6 = = 25 × 2 × 3; 16 × 4 = 16 × 2 × 2; 2 × 30 = 2 × 3 × 10 и т. п. Таким образом прием устного умножения на круглые десятки уже встречался. Но он усваивается нелегко, в особенности нелегко его объяснение. Поэтому необходимо повторить устное умножение на 20, 30, 40 и т. д. с подробными объяснениями (стр. 247).

Решая примеры устно, будем писать: 3 × 60 = (3 × 6) × 10 = 180; 23 × 40 = = (23 × 4) × 10 = 920 и т. д.

Перейдем к письменному умножению на круглые десятки. Будем множимые числа брать все больше и больше:

$$\times\begin{array}{r}17\\50\\\hline 850\end{array}\qquad\times\begin{array}{r}375\\50\\\hline 1\,8750\end{array}\qquad\times\begin{array}{r}4\,807\\40\\\hline 192\,280\end{array}$$

Умножая 17 на 50, умножим 17 на 5, получим 85. К этому произведению припишем нуль: получим 850. И т. д.

Полезно приучить детей, при умножении на круглые десятки, сперва записывать в произведении справа нуль (умножение на 10). Этот прием пригодится в будущем при умножении на многозначное число.

Умножая 375 на 50, рассуждаем так: чтобы умножить 375 на 50, надо умножить 375 на 5 и к произведению приписать справа нуль. Напишем сначала этот нуль и затем будем умножать 375 на 5. Пятью пять — 25, 5 пишем, а 2 — в уме. Пятью семь — 35, да 2 — 37, 7 пишем, а 3 в уме и т. д. Правило в общем виде будет дано несколько позднее (стр. 280).

Примеры:
а) 10 × 20; 60 × 30; 65 × 40.
б) 100 × 90; 300 × 30; 450 × 50; 735 × 40; 602 × 60.
в) 1 000 × 30; 7 000 × 20; 7 500 × 80; 8 340 × 90; 7 345 × 80; 6 004 × 40.
г) 40 × 273; 50 × 280.

Умножение на двузначное число. Основу умножения на двузначное число составляет понятие, которое в теоретической арифметике носит название распределительного закона умножения (стр. 21). Чтобы умножить 8 на 32, надо 8 умножить на 30 и на 2, затем сложить полученные произведения, так что 8 × 32 = 8 × 30 + 8 × 2 = 240 + 16 = 256.

Урок умножения на двузначное число начнем с примеров устного умножения. По 7 возьмем 25 раз. Для этого по 7 возьмем 20 раз, получим 140;

по 7 возьмем 5 раз, получим 35. Сложим 140 и 35, получим 175.

$$7 \times 25 = 7 \times 20 + 7 \times 5 = 140 + 35 = 175.$$

Можно сделать умножение в обратном порядке:

$$7 \times 25 = 7 \times 5 + 7 \times 20 = 35 + 140 = 175.$$

Ряд примеров устного умножения на двузначное число поможет ученикам понять существо этого умножения. Перейдем теперь к простым примерам письменного умножения. Умножим 37 на 25.

$$\times\begin{array}{r} 37 \\ 20 \\ \hline 740 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 37 \\ 5 \\ \hline 185 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 740 \\ 185 \\ \hline 925 \end{array}$$

По 37 возьмем 20 раз, получим 740. Затем по 37 возьмем 5 раз, получится 185. Сложим числа 740 и 185. Получим произведение 925.

Мы могли бы 37 на 25 умножить иначе: сперва 37 умножить на 5, затем на 20 и наконец сложить 185 и 740:

$$\times\begin{array}{r} 37 \\ 5 \\ \hline 185 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 37 \\ 20 \\ \hline 740 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 185 \\ 740 \\ \hline 925 \end{array}$$

Решим несколько примеров умножения на двузначное число, записывая решение в виде трех действий — двух умножений и одного сложения. Запишем, наконец, все три действия в одном месте. Например, умножим 45 на 35.

$$\times\begin{array}{r} 45 \\ 30 \\ \hline 1\,350 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 45 \\ 5 \\ \hline 2\,25 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 1\,350 \\ 225 \\ \hline 1\,575 \end{array} \quad \text{Короче} \quad \times\begin{array}{r} 45 \\ 35 \\ \hline 1\,350 \\ 225 \\ \hline 1\,575 \end{array} \quad \text{или} \quad \times\begin{array}{r} 45 \\ 35 \\ \hline 225 \\ 1\,350 \\ \hline 1\,575 \end{array}$$

45 — множимое, 35 — множитель, 1 350 — неполное произведение, 225 — неполное произведение, 1 575 — полное произведение.

Несколько примеров необходимо решить, делая сперва подробную запись, а затем сокращенную, после чего можно перейти на одну сокращенную запись. Таким образом умножение на двузначное число мы начинаем с устных примеров, которые помогут детям понять последовательность в вычислениях; затем решаем несколько примеров письменно, подробно записывая вычисления. Эти примеры укрепят в сознании учащихся порядок вычислений. Только после этого можно ввести сокращенную запись.

Нуль на конце в одном из неполных произведений, например, в числе 1 350, надо некоторое время сохранять. Этим достигается большая ясность действия. Преждевременный пропуск нуля в неполном произведении приводит детей к своеобразным ошибкам: некоторые из них начинают отбрасывать нули без разбору. Например:

Правильные записи:

$$\begin{array}{r} 3541 \\ \times\quad 56 \\ \hline 21246 \\ 17705 \\ \hline 198296 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2435 \\ \times\quad 36 \\ \hline 14610 \\ 7305 \\ \hline 87660 \end{array}$$

Неправильные записи:

$$\begin{array}{r} 3541 \\ \times\quad 56 \\ \hline 21246 \\ 1775 \\ \hline 38996 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2435 \\ \times\quad 36 \\ \hline 1461 \\ 7305 \\ \hline 74511 \end{array}$$

В некоторых руководствах по методике арифметики короткая запись умножения на двузначное число вводится слишком поспешно. Такой метод неизбежно приводит детей к полусознательному усвоению механизма умножения и к ошибкам. Наоборот, медленное, постепенное приближение к механизму служит залогом твердого и сознательного усвоения действия (генетический метод, стр. 34).

Умножение на двузначное число дети сопровождают таким объяснением:

Умножим 36 на 24. Умножим 36 на 4 : 4 раза по 6 — 24, 4 пишу, а 2 — в уме; 4 раза по 3 — 12, да 2 — 14. Записываем. Умножим 36 на 20. Для этого 36 умножим на 2 и к полученному числу припишем нуль. Пишем нуль.

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\quad 24 \\ \hline 144 \\ 720 \\ \hline 864 \end{array}$$

Умножим 36 на 2 : 2 раза по 6 — 12, 2 пишу, а 1 — в уме; два раза по 3 — 6, да 1 — 7. Сложим 144 и 720.

Необходимо решить несколько примеров и задач с перестановкой сомножителей: 33 × 27 и 27 × 33; 16 × 98 и 98 × 16 и т. п. Решим еще пример 16 × 3 421. Удобнее умножить 3 421 на 16.

Упражнения в письменном умножении на двузначное число можно расположить в такой последовательности:

а) Сомножители — двузначные числа (28 × 36; 35 × 28; 36 × 11; 48 × 33).

б) Во множителе — левая цифра 1, неполные произведения имеют поровну цифр (472 × 17; 3 755 × 15; 48 006 × 17).

в) Множитель — любое двузначное число (287 × 11; 287 × 33; 305 × 63; 4 877 × 32; 10 036 × 36; 24 367 × 36).

г) Во втором неполном произведении — два или три нуля: (565 × 43; 375 × 45).

д) В произведении на конце нули (425 × 24; 7 125 × 48).

е) Умножение при помощи перестановки сомножителей (25 × 3 743; 38 × 2 005).

Умножение на 100. То, что было сказано об умножении на 10, относится и к этому случаю умножения. В самом деле: 1 × 100 = 1 с. = 100; 3 × 100 = = 3 с. = 300; 5 × 100 = 5 с. = 500 и т. д.

При умножении на 100 каждая единица заменяется сотней. 17 × 100 = 17 с. = 1 700; 28 × 100 = 28 с. = 2 800 и т. д.

Сравнивая 17 и 1700, мы видим, что каждое разрядное число стало больше в 100 раз, поэтому 1 700 больше в 100 раз. Сделав ряд примеров, выведем правило: чтобы умножить число на 100, надо приписать к нему справа два нуля.

Необходимо сделать несколько пар примеров с перестановкой сомножителей: 28 × 100, 100 × 28; 300 × 100, 100 × 300 и т. п.

Умножение на круглые сотни. Умножение на круглые сотни усваивается по аналогии с умножением на круглые десятки.

7 × 30	9 × 20	8 × 40
7 × 300	9 × 200	8 × 400

Умножим 7 на 30. 7 надо взять, как слагаемое, 30 раз. Представим себе, что эти слагаемые записаны так: в ряду 3 раза по 7 и таких рядов 10. Узнаем, сколько единиц в ряду: 7 × 3 = 21. Узнаем, сколько единиц в 10 рядах: 21 × 10 = 210. Запишем эти два действия короче: 7 × 30 = (7 × 3) × 10 = 210.

Правило можно сформулировать так: чтобы умножить число на круглые десятки, надо умножить его на цифру десятков и к полученному произведению приписать нуль.

У некоторых преподавателей возникает сомнение, „грамотно“ ли говорить — на „цифру“ десятков: умножают на число, а не на цифру. Такая мнительность не основательна: учащиеся хорошо понимают, что перемножаются числа, а не знаки. Говорим же мы — „запиши число“, „сумма цифр делится на 9“ и т. п. Выражение „умножить на цифру десятков“ ярче, образнее, чем умножить „на число десятков“, поэтому первое выражение следует предпочесть. Многие известные авторы французских учебников делают этот вывод именно в такой форме (Bourlet).

Умножим 7 на 300. Представим себе, что 300 семерок записаны так: в ряду 3 раза по 7. Таких рядов 100. Узнаем, сколько единиц в ряду: 7 × 3 = 21. Узнаем, сколько единиц в 100 рядах: 21 × 100 = 2 100. Более короткая запись:

7 × 300 = (7 × 3) × 100 = 2 100.

Произведем ряд умножений:

8 × 500 = (8 × 5) × 100 = 4000.
17 × 300 = (17 × 3) × 100 = 5100 и т. д.

Перейдем к письменному умножению.

$$\begin{array}{r} 387 \\ \times\,400 \\ \hline 144800 \end{array}$$

Чтобы умножить 387 на 400, умножим 387 на 4 и к полученному произведению припишем два нуля.

Правило в общем виде можно сформулировать так: чтобы умножить число на круглые сотни, надо умножить его на цифру сотен и к полученному произведению приписать два нуля.

Умножая на круглые сотни, мы будем сперва выписывать справа два нуля, а затем уже умножать на цифру сотен.

Упражнения располагаем в такой последовательности:

а) 19 × 50 19 × 500 б) 17 × 200 824× 200

в) 85 × 600 375 × 400 г) 300 × 86 500 × 344

Умножение на трехзначное число. Умножим предварительно какое-либо число на двузначное число, например, 287 на 34.

$$\begin{array}{r} 287 \\ \times\,34 \\ \hline 1148 \\ 8610 \\ \hline 9758 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 287 \\ \times\,34 \\ \hline 1148 \\ 861 \\ \hline 9758 \end{array}$$

Во втором неполном произведении получен нуль на конце. Отчего?

Этот нуль можно не писать; чтобы сохранить его место, второе произведение пишут под первым, отступив влево на одну цифру.

Умножим 348 на 246. Число 348 надо взять 200 раз, 40 раз и 6 раз. Затем полученные неполные произведения сложить.

$$\begin{array}{r} 348 \\ \times\,246 \\ \hline 69600 \\ 13920 \\ 2088 \\ \hline 85608 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 348 \\ \times\,246 \\ \hline 2088 \\ 13920 \\ 69600 \\ \hline 85608 \end{array}$$

Можно умножить 348 на 246 в другом порядке: сперва 348 умножить на 6, затем на 40 и на 200. Изменится порядок записи неполных произведений. Окончательное произведение будет то же.

Сделав несколько подобных же примеров, можно освободить запись умножения от нулей на конце в неполных произведениях.

$$\begin{array}{r} 647 \\ \times\,235 \\ \hline 3235 \\ 19410 \\ 129400 \\ \hline 152045 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 647 \\ \times\,235 \\ \hline 3235 \\ 1941 \\ 1294 \\ \hline 152045 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3147 \\ \times\,145 \\ \hline 15735 \\ 125880 \\ 314700 \\ \hline 456315 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3147 \\ \times\,145 \\ \hline 15735 \\ 12588 \\ 3147 \\ \hline 456315 \end{array}$$

Отбрасывая один нуль на конце в произведении 19410 и два нуля в произведении 129400, учащийся должен отдать себе отчет — почему это можно сделать.

Чтобы показать, что при умножении на трехзначное число всегда можно откинуть во втором неполном произведении один нуль на конце, а в третьем неполном произведении два нуля, надо решить несколько примеров с подробной и сокращенной записью, как это сделано выше.

Упражнения расположим так:

а) Во втором произведении на конце — один нуль, в третьем два нуля (492 × 273; 1374 × 342; 2142 × 333).

б) Во втором произведении на конце — два нуля или в третьем — три нуля (224 × 275; 225 × 244).

в) Умножение с перестановкой (345 × 4321; 111 × 275; 333 × 456).

Деление в пределах миллиона.

Делимое, делитель и частное. Как мы уже неоднократно говорили, учащиеся различают два вида деления и представляют себе роль каждого из трех чисел деления и соотношение между ними. Остается назвать эти числа. Единство терминологии укрепит в сознании учащихся мысль о единстве обоих видов деления.

Предложим ученикам две задачи на один и другой вид деления.

На класс выдали 111 тетрадей. В классе 37 учеников. Сколько тетрадей получит ученик?

Надо разделить 111 т. на 37 равных частей:

111 т. : 37 = 3 т.

Короче говоря, надо разделить 111 на 37.

Число 111 называется делимым, 37 — делителем, 3 — частным.

111	37	=	3
Делимое	Делитель		Частное

Число 111 делим, поэтому оно и называется *делимым*. Это число делится на 37; число 37 — *делитель*. Число 3 составляет часть делимого, 3 — *частное*.

В школу привезли 360 *м* ткани. Эту ткань роздали учащимся по 5 *м* каждому. Сколько учеников получили ткань?

Надо узнать, сколько раз 5 *м* содержится в 360 *м*.

Короче: 360 разделить на 5.

360 *м* : 5 *м* = 72.

Мы разделили 360 на 5 и получили 72. И здесь 360 — делимое, 5 — делитель, 72 — частное.

За этими задачами следуют примеры, на которых учащиеся упражняются в применении терминов деления.

126 : 9 = 14.

Это деление можно выразить двояко: 126 разделить на 9 равных частей, получится в каждой части по 14.

126 разделить по 9 или узнать сколько раз 9 содержится в 126. В 126 число 9 содержится 14 раз.

Короче: 126 разделить на 9, получится 14.

126 — делимое, 9 — делитель, 14 — частное.

Упражнения:

а) Надо разделить 144 на 9. Назвать эти числа.

б) Найти частное чисел 150 и 75.

в) 180 : 36 = 5. Как назвать эти числа?

36 × 5 = 180. Как назвать те же числа?

Деление многозначных чисел. Будем изучать следующие случаи деления: на однозначное число; на десять; на круглые десятки; на двузначное число при однозначном частном; на двузначное число.

Замечания о методической последовательности в выработке записи и объяснений умножения, сделанные на стр. 273, относятся и к делению.

Деление многозначного числа на однозначное число.

Некоторые случаи деления многозначного числа на однозначное удобны для устного вычисления и важны в качестве подготовительных к письменному делению; вот они:

1. Все разрядные числа делимого — кратные делителя (8000 : 4; 8400 : 2; 8040 : 2; 6009 : 3; 3690 : 3; 3609 : 3)

2. Не все разрядные числа делимого — кратные делителя:

а) Деление круглых тысяч на однозначное число (15000 : 3; 75000 : 3).

б) Деление без перехода через тысячу (1000 : 2; 3000 : 2; 2500 : 2; 6450 : 3).

в) Деление с переходом через тысячу (2400 : 4; 6000 : 4; 4200 : 3).

Приступая к письменному делению на однозначное число, ученик должен обладать следующими понятиями и навыками:

а) Иметь отчетливое понятие о связи деления с умножением (стр. 23).

б) Знать десятичный состав числа.

в) Уметь выделять из числа десятичные группы (стр. 267).

г) Уметь делить двузначное или трехзначное число на однозначное, разбивая делимое на десятичные группы (например, при делении 450 на 3,

разбить число 450 на 300 и 150). Основанием деления многозначного числа на однозначное служит свойство деления, которое в теоретической арифметике формулируется так: чтобы сумму нескольких чисел разделить на данное число, достаточно на это число разделить каждое слагаемое (стр. 25).

Представление об этом свойстве, невысказанное явно, постепенно вырабатывается у детей, начиная со второго года обучения.

С делением трехзначного числа на однозначное ученики уже знакомы (стр. 251). Начнем с простейших примеров деления: 864 : 2; 64820 : 2 и т. п. При решении этих примеров, делимое разлагается только на разрядные слагаемые.

Разделим 402 на 6. Для этого разобьем делимое 402 на две части: 360 и 42, так что 360 + 42 = 402.

Разделим 360 на 6 и 42 на 6. Получим 60 и 7, а вместе 67.

$$360 : 6 = 60; \quad 42 : 6 = 7; \quad 60 + 7 = 67.$$

Решение этого примера запишем.

Решим ряд других примеров, сопровождая решение подробной записью.

402 : 6	588 : 4	3432 : 6	3432 : 6
360 67	400 147	3000 572	30 572
42	188	432	43
42	160	420	42
	28	12	12
	28	12	12

Объяснять деление 3432 : 6 будем так;

3 тыс. невозможно разделить на 6 так, чтобы получилась тысяча. Раздробим 3 тыс. в сотни, получим 30 сотен, да 4 сотни — 34 сотни. Разделим 34 сот. на 6, получим 5 сот. Можно предвидеть, что в частном будет 3 цифры. Узнаем, сколько сотен мы разделили: 5 сот. × 6 = 30 сот. или 3000. Узнаем, сколько осталось неразделенных единиц: 3432 − 3000 = 432 и т. д.

Решив таким образом несколько примеров, мы затем будем упрощать запись, отбрасывая в ней лишние нули, как показано выше. Вместе с тем дети должны приучаться к краткому стереотипному способу объяснения.

Самое важное и нелегкое в делении заключается в понимании того, что делимое надо разбить на части и именно на такие части, от деления которых на данное число должны получиться разряды частного. На это обстоятельство руководства по методике арифметики мало обращают внимания, и потому дети усваивают деление механически, как непонятный для них фокус.

Чтобы учащиеся не утрачивали понимания механизма деления, следует предлагать им вопросы:

На какие части разбили мы делимое? Ответ: на 3000, 420 и 12, так как 3000 + 420 + 12 = 3432.

Какие числа получились от деления на 6 чисел 3000, 420 и 12? Ответ: 500, 70 и 2.

Надо обратить внимание на те случаи деления, когда в частном получаются нули. Обыкновенно ученики пропускают эти нули и получают неверный результат. Чтобы избежать этих ошибок, надо: 1) давать побольше примеров с нулями в частном; 2) заставлять учеников наперед по первой цифре частного предсказывать число его цифр и отмечать точками их места; 3) требовать, чтобы ученик называл единицы каждого разряда частного.

Так, при решении предыдущего примера ученик, получив первое разрядное число частного — 5 сот., должен сказать, что в частном будет 3 цифры и записать, как показано.

```
3432 : 6
      ----
       5. .
```

Упражнения располагаем в таком порядке:

а) Разрядные числа делимого — кратные делителя (88 448 : 4; 96003 : 3)

б) У делимого и частного — поровну цифр (858 : 6; 4968 : 4; 38229 : 3).

в) В частном цифр меньше, чем в делимом (1555 : 5; 13 688 : 4; 117 735 : 5).

г) Нули между крайними цифрами частного (1525 : 5; 13 628 : 4; 102 735 : 5).

д) Нули на конце частного (2 960 : 8; 262 500 : 7; 31 237 : 9).

Необходимо остановиться подробнее на делении с остатком. Недооценка этого случая деления является источником многих ошибок при письменном делении. Дети должны всегда иметь в виду, что остаток должен быть меньше частного. Приведем пример ошибки, типичной для учеников, начинающих заниматься делением: она показана на примере деления 3772 на 4.

Неправильное решение	Правильное решение
3772 : 4	34382 : 6
32 8143	30 5730
5	43
4	42
17	18
16	18
12	2
12	

Важно также предусмотреть и такой случай деления, когда деление совершается с остатком, а в частном получается на конце нуль (см. пример 34 382 : 6). В таких случаях дети особенно часто пропускают этот нуль.

При решении примеров следует предлагать учащимся делать иногда проверку деления (см. стр. 290).

Деление на 10. Деление на 10 можно толковать в двух смыслах — в смысле деления на 10 равных частей и деления по 10. Так, при делении 560 на 10 мы можем рассуждать следующим образом:

1. Разделим 560 на 10 равных частей. Каждый десяток при делении на 10 заменяется единицей. В числе 560 — 56 десятков; при делении 56 д. на 10, получим 56 ед.

2. Можно рассуждать иначе: узнаем, сколько раз 10 содержится в числе 560. В числе 560 — 56 десятков. Поэтому 10 в числе 560 содержится 56 раз.

Второе рассуждение — проще. Для обоих рассуждений ученики должны уметь выделять из многозначного числа десятки (стр. 267).

Сперва решим группу примеров на деление без остатка: 10 : 10; 30 : 10; 80 : 10; 120 : 10; 750 : 10; 1000 : 10; 5000 : 10; 3500 : 10; 7560 : 10; 10000 : 10 и т. д.

При объяснении деления пользуемся вторым способом рассуждения. Выводим правило. После этого переходим к примерам на деление с остатком: 27 : 10; 45 : 10; 136 : 5 и т. д.

Деление на круглые десятки. Это деление будет усвоено учащимися без труда, если они будут уметь бегло делить трехзначное число на круглые десятки при однозначном частном.

Пусть надо разделить 320 на 80. Для этого 32 разделим на 8, получим 4. Учащиеся должны уметь объяснить это деление (стр. 253).

Разделим еще 345 на 80. Для этого разделим 34 на 8, получим 4. Узнаем, сколько единиц мы разделили: 80 × 4 = 320. Сколько единиц еще осталось неразделенных: 345 − 320 = 25.

$$\underline{345} : 80 = 4$$
$$\text{Ост. } 25$$

Деление многозначного числа на круглые десятки надо начать с повторения деления трехзначного числа на круглые десятки при однозначном частном.

Деление многозначного числа на круглые десятки выполняется в общем так же, как и на однозначное число. Пусть надо 22 860 разделить на 30.

```
22860 : 30
210     762
 186
 180
   60
   60
```

В делимом 22 тысячи. В частном тысяч не получится, поэтому 22 тысячи раздробим в сотни, получим 220 сотен, да 8 сотен — 228 сотен. Разделим 228 сотен на 30. Для этого разделим 22 на 3, получим 7. Поэтому, если разделим 228 сотен на 30, то получим 7 сотен. Можно предвидеть, что в частном

будет три цифры. Умножим 7 сотен на 30, получим 210 сотен. От 228 сотен отнимем 210 сотен, получим 18 сотен и т. д.

Из этого примера видно, как важно достичь уменья сознательно и в то же время бегло производить деление многозначного числа на однозначное и трехзначного на круглые десятки.

Полезно проверять частное (стр. 290).

Упражнения:

а) 360 : 90; 320 : 40.

б) 750 : 50; 6880 : 40; 193 320 : 60.

в) 14350 : 70; 160 320 : 80 (деление с нулем в частном)

г) 615 : 30; 12 230 : 50 (деление с остатком).

Деление трехзначного числа на двузначное при однозначном частном. Этот случай деления является весьма важной ступенью к делению многозначного числа на многозначное. Можно с уверенностью сказать, что если учащегося не затрудняет деление трехзначного числа на двузначное при однозначном числе в частном, его нисколько не затруднит и деление многозначного числа на двузначное. Действительно, для того, чтобы деление числа 67150 на 85 было доступно ученику, он должен уметь разделить 671 на 85 и 765 на 85.

Пусть требуется 508 разделить на 62. Чтобы быстрее найти ответ, округлим число 62; это число близко к 60. Деля 508 на 60, мы разделим 50 на 6 и получим 8. Однако, надо было 508 разделить не на 60, а на 62. Так как числа 60 и 62 мало разнятся друг от друга, то при делении 508 на 62 может получиться или 8, или близкое к 8 число. Испытаем цифру 8. Для этого нам придется сделать два действия: 62 × 8= 496 и 508 − 496 = 12. Так как остаток 12 меньше 62, то цифра 8 верна.

Разыскивая цифру частного при делении 508 на 62, мы вместо утомительных поисков ее путем проб, взяли цифру 8, полученную от деления 508 на 60, или 50 на 6 и, испытав ее, убедились, что она верна.

Возьмем другой пример: 440 : 59. Округлив 59, получим 60. Разделив 440 на 60, получим 7. Испытаем эту цифру: 59 × 7 = 413, 440 – 413 = 27. Цифра 7 верна, остаток 27.

Разделим еще 340 на 48. Округлим 48, получим 50. Разделим 340 на 50; получим 6. Проверим цифру 6. Для этого сделаем умножение: 48 × 6 = 288. Вычтем: 340 – 288 = 52. Остаток больше делителя 48; цифра 6 — слаба. Усилим ее на единицу. Тогда 48 × 7 = 336, 340 – 336 = 4. Цифра 7 — верна.

Во всех примерах, приведенных выше, мы брали частные, весьма близкие к круглым числам. Рассмотрим теперь случай деления на трудно закруглимое частное. Пусть, например, надо 340 разделить на 46. Отыскивая цифру

частного, можно заменить делитель круглым числом — 40 или 50. Посмотрим, что выгоднее. Разделим 340 на 50, получим 6. Испытаем эту цифру:

$$46 \times 6 = 276,\ 340 - 276 = 64.$$

Цифра 6 — слаба. Усилив ее, получим 7. Проверим эту цифру:

$$46 \times 7 = 322,\ 340 - 322 = 18.$$

Цифра 7 верна. При испытании цифры 6, мы должны были сделать два действия − 46 × 6 и 340 − 276.

Возьмем вместо 46 круглое число 40 и, разделив 340 на 40, получим 8. Испытаем эту цифру: 46 × 8 = 368. Сразу видно, что цифра 8 сильна. Ослабив ее, получим верный ответ 7. Здесь для испытания неверной цифры 8 пришлось сделать только одно действие — 46 × 8.

Отсюда видно, что при округлении делителя, если цифра частного окажется неверной, выгоднее, чтобы она была сильна, а не слаба, т. е. выгоднее, округляя делителя, брать меньшее круглое число. Так все и поступают, не отдавая часто себе в этом отчета. Деля, например, 340 на 46, делят 34 на 4 и затем полученную цифру 8 испытывают, умножая 46 на 8.

Итак, задаваясь цифрой частного при делении трехзначного числа на двузначное, мы будем брать при округлении делителя *чаще всего младшее* круглое число. И только в том случае, когда делитель оканчивается цифрой 8 или 9, выгодно, округляя его, брать старшее круглое число.

Изучение деления трехзначного числа на двузначное при однозначном частном разобьем на следующие этапы:

Первый этап. Первая цифра делителя слева — единица. Тогда цифру частного приходится подбирать путем проб. Например — 112 : 16. Узнаем, сколько раз 16 содержится в числе 112. Будем проверять ответ, задаваясь цифрой частного. Непосредственно видно, что частное будет больше 5, так как 16 × 5 = 80. Не 6 ли раз? 16 × 6 = 96. 6 — мало. Не 7 ли раз? 16 × 7 = 112. Частное получилось 7.

Второй этап. Цифры единиц делителя — 1, 2, 3 или 4. Например 252 : 42. Надо узнать, сколько раз 42 содержится в числе 252. Учащиеся находят ответ путем проб. Чтобы легче найти частное, округлим 42. Это число — близко к круглому числу 40. Разделим 252 на 40. Для этого разделим 25 на 4, получим 6. Узнаем, сколько раз 42 содержится в числе 252: не 6 ли раз? 42 × 6 = 252. Следовательно 252 : 42 = 6.

Третий этап. Цифра единиц делителя — 5, 6 или 7. Например, 322 : 46. Рассуждаем, как в предыдущем случае. Подбирая цифру частного, делим 322 на 40, т. е. 32 на 4.

Четвертый этап. Цифра единиц делителя — 8 или 9. Например 406 : 58. Рассуждаем, как в предыдущем случае, 58 округляем в 60 и делим 40 на 6.

```
460 : 56
448   8
 12
```

Пятый этап. Деление с остатком. Разделим 460 на 56. Чтобы скорее найти ответ, разделим 46 на 5. Получим 9. Узнаем, сколько раз 56 содержится в 460: не 9-ли раз? Проверим цифру 9. Умножая 56 на 9, видим, что 9 — 48 много. Не 8-ли раз? Умножим 56 на 8, получим 448. Вычтем 448 из 460, получим 12, Так как 12 меньше 56, то цифра 8 — верна.

Упражнения: а) Деление без остатка: 111 : 37; 328 : 41; 364 : 52; 441 : 63; 483 : 69; 464 : 58; 528 : 66.

б) Деление с остатком: 350 : 42; 500 : 69; 396 : 56.

Деление многозначного числа на двузначное. Если основательно проработать предыдущие случаи деления, т. е. деление многозначного числа на однозначное, делание трехзначного числа на круглые десятки и на двузначное число при однозначном частном, если при этом большое внимание обращено было на деление с остатком, то случай деления многозначного числа на двузначное будет вполне доступен для учеников.

Начнем с простейших примеров: 299 : 23; 336 : 28; 465 : 31 и др. В делимом 2 с. Если разделить 2 с. на 23, то сотен не получится. В делимом 29 д. Разделим 29 д. на 23, получим 1 д. Один десяток умножим на 23, получим 23 д. Мы разделили 23 д., осталось 6 д., а 6 д. да 9 ед. — 69 ед. Разделим 69 ед. на 23, получим 3 ед.

```
299 : 23
23    13
 69
 69
```

Всего получили 13.

Переходим к примерам, в которых делимое — четырехзначное число, а частное — трехзначное. Например, 4 876 : 23. Затем перейдем к таким случаям, когда частное — двузначное число. Например, 4 316 : 52. Если предыдущие случаи деления основательно изучены, то речь при объяснении деления многозначного числа на двузначное может быть весьма сжата. Деление 4 316 на 52 ученик может сопровождать такими пояснениями. Ни тысяч, ни сотен в частном не получается. Разделим 431 д. на 52. Для этого разделим 43 на 5, получим 8. Проверим эту цифру — 52 × 8 = 416. Из 431 вычтем 416, получим 15 — цифра 8 верна. Мы разделили 431 д. на 52, получили 8 д. и 15 д. в остатке. 15 д. да 6 ед. — 156 ед. Разделим 156 ед. на 52, получим 3 ед. Проверим цифру 3 − 52 · 3 = 156. Цифра 3 верна. Получили 83.

```
4316 : 52
416    83
 156
 156
```

После нескольких примеров деления четырехзначного числа на двузначное, переходим к делению пятизначного числа на двузначное, когда в частном получается 4 цифры и 3 цифры и т. д.

Объясняя деление, ученик должен называть единицы, которые он делит и которые получаются в остатке, и разрядные единицы частного. Например,

я разделил 504 *десятка* на 58, получил 8 *десятков* и в остатке 40 *десятков*. Такое наименование единиц вносит в рассуждения ясность и предотвращает до известной степени часто встречающуюся ошибку, когда ученик, задавшись слабой цифрой частного, получает в частном лишнюю цифру.

Упражнения: а) Делимое — трехзначное число, частное двузначное (420 : 35; 612 : 36).

б) Делимое четырехзначное число, частное трехзначное и двузначное (4 392 : 36; 7 843 : 23; 1 806 : 42; 2 064 : 43; 2 793 : 49; 2 632 : 56).

в) Делимое — пятизначное, частное четырехзначное или трехзначное (68 848 : 52; 80 829 : 63; 15 622 : 73; 26 048 : 88; 16 170 : 55).

г) Делимое — шестизначное, частное пятизначное или четырехзначное (209 916 : 17; 566 064 : 36; 217 542 : 26; 462 924 : 63).

д) Частное с нулями (10 032 : 33; 14 763 : 48; 124 496 : 63; 232 406 : 58).

е) Деление с остатком (710 : 43; 2 800 : 48).

ж) Деление с остатком, частное с нулями на конце (19 740 : 47; 22 700 : 63).

Проверка частного. Поверка частного основывается на понятии о соотношении между делением и умножением. Это соотношение так часто встречалось детям в курсе арифметики, что стало привычным для их сознания. Действительно, табличное деление и некоторые случаи внетабличного деления на втором году выполняются на основе понятия о соотношении между делением и умножением. Цифры частного ученик испытывает и проверяет при помощи умножения. Примеры на деление с проверкой встречались уже раньше.

Дадим ученикам несколько примеров: 91 : 7, 13 × 7; 125 : 5, 5 × 25; 144 : 9, 9 × 16 и т. п. При решении каждой пары примеров обращаем внимание на связь их: например, если 91 разделить на 7, то получается 13; если же 13 умножить на 7, то получится снова 91.

Предлагаем решить еще два примера: 136 : 8, 17 × 8. Решив первый из них, требуется написать ответ во втором примере, не производя вычисления.

```
360 : 24
24    15
120
120
```

После этих подготовительных упражнений приступим к проверке деления. Разделим 360 на 24, получим 15. Если умножим 24 на 15, то сколько должно получиться? Умножаем 24 на 15 и получаем 360. Так проверяют деление.

Можно дать ученикам несколько решенных примеров с верными и неверными ответами, которые они проверяют.

Действия над именованными числами в пределах миллиона.

Образование именованного числа. Понятие именованного числа образуется в процессе измерения. Для того, чтобы ученик ясно, конкретно представлял себе именованное число, надо, чтобы он неоднократно получал именованные числа сам путем измерения. Поводы для такого измерения дают занятия по труду, лабораторные занятия в классе и работы на местности. Результаты измерения записываются. К полученным числам можно присоединить другие числа, взятые из книг, например:

средний рост мальчика 10 лет .... 1 *м* 28 *см*
средний рост юноши 20 лет .... 1 *м* 68 *см*
средний вес мальчика 10 лет .... 26 *кг* 860 *г*
средний вес юноши 20 лет .... 60 *кг*
1 литр ржи весит .... 700 *г*
1 литр овса .... 450 *г*
1 куб. метр сырых березовых дров .... 630 *кг*
1 куб. метр полусухих берез. дров .... 450 *кг*
1 куб. метр сухого песку .... 1 *т* 500 *кг*

Кроме этих данных, относящихся к длине и весу, можно подобрать некоторые именованные числа, выражающие цену и время. Все эти числа получились при *измерении* длины, веса, времени и стоимости. Это — важная их особенность. Числа эти называются *именованными*, так как у каждого из них имеется название или *имя* меры.

Просмотрим полученные именованные числа. Длина проволоки — 3 *м*. Мы получили это число, измерив проволоку только одной мерой — метром; 3 *м* — *простое* именованное число. Вес 1 *л* ржи 700 *г*. Это число получено при взвешивании 1 *л* ржи с помощью одной меры — грамма. И это число называется простым именованным числом. Рассматриваем и другие числа. Делаем вывод: простое именованное число получается при измерении величин одной мерой и потому заключает название одной меры.

Тем же путем приходим к выводу, что *составное* именованное число получается при измерении величины двумя-тремя мерами и поэтому заключает название нескольких мер.

Для наглядности полезно записать:

ИМЕНОВАННЫЕ ЧИСЛА.

Простые именованные числа:	*Составные именованные числа:*
3 *м*, 70 *т*, 60 *кг*, 700 *г*, 15 час., 3 руб., 45 мин., 60 коп.	1 *м* 23 *см*, 26 *кг* 860 *г*, 3 р. 50 к., 5 ч. 40 м

Если при числе нет наименования его единиц, то оно называется *отвлеченным*.

Измерение длины. Измерение длины производится 1) на местности и 2) в классе.

1. Измерения длины на местности. Повод и материал для измерения доставляет трудовое обучение на огороде или в саду.

К измерению расстояния на местности приводят две существенно различные задачи:

а) Измерить прямую линию, уже отмеченную, например: измерить длину и ширину огорода, длину дороги, расстояние между двумя деревьями и др.

б) Отмерить на земле прямую линию заданной длины.

Прямая линия отмечается на земле вехами, т. е. заостренными с одного конца палками, имеющими длину, несколько большую роста человека. Если прямая не очень длинная, например, не более 50 *м*, то достаточно двух вех, воткнутых у ее концов. Если прямая длиннее, то вдоль нее ставят несколько вех на расстоянии примерно 75 шагов одну от другой. Допустим, что две вехи уже воткнуты. Спрашивается, как же поставить третью веху, чтобы все они стояли на одной прямой линии? В таком случае один ученик становится за первой вехой шагах в 3 — 4 от нее, а другой ставит третью веху шагах в 75 за второй вехой. Три вехи будут стоять на прямой линии, если ученику, смотрящему на первую веху, будет казаться, что она закрывает другие две вехи. Если этого не окажется, он подает рукой знак, в какую сторону подвинуть веху.

Измерение расстояния на местности будем делать с помощью мерительной веревки. Веревка берется не толстая, достаточна толщина в 5 — 6 *мм*. Концы ее завязываются в виде колечек. Расстояние между серединами колечек 10 *м*. Каждый метр отмечается на веревке небольшой жестяной бляшкою или карточкой с соответствующим числом.

Через колечки веревки продеваются две вехи, с помощью которых веревка натягивается. Измерение делают два ученика: один удерживает конец веревки около начальной вехи, другой уходит вперед вдоль линии и с помощью своей вехи натягивает веревку. Первый ученик, глядя на эту веху, следит за тем, чтобы веревка ложилась вдоль прямой линии, отмеченной вехами. Натянув веревку, другой ученик втыкает вместо своей вехи шпильку или небольшой колышек. Затем оба подвигаются с веревкой вперед, пока начало веревки не окажется у колышка. Тогда первый ученик вытаскивает колышек, а на его место ставит свою веху, и т. д. Число подобранных им колышков покажет, сколько раз откладывалась веревка.

Кроме измерения расстояний на местности необходимо еще упражнять учащихся в оценке расстояния наглаз. Глазомер — важное умение в жизни

человека, которое школа должна развивать. Оценка наглаз расстояний будет более или менее посильна для учащихся, если у них уже есть навык в измерении расстояний на местности. Поэтому раньше, чем приступить к глазомерной оценке, ученики должны отмерить мерной веревкой расстояния в 5 *м*, 10 *м*, 20 *м*, 30 *м*, 40 *м* и 50 *м*.

Кроме того следует измерить и записать в тетрадки хорошо известные учащимся расстояния — ширину улицы у школы, длину двора, длину школы, расстояние, на которое ученик может бросить камень и др. Только после этого можно приступить к глазомерной оценке.

Учитель отмечает двумя вехами прямую линию, а группа учеников располагается у одной из них. Каждый из учеников молча определяет наглаз расстояние между вехами и записывает число метров на куске бумаги. За этим следует измерение расстояния между вехами шагами (2 детских шага — 1 *м*) и проверка чисел, предварительно намеченных детьми. Эти числа бывают далеки от действительности, но все же полезно заставлять учащихся предвосхищать ответ до измерения.

Чтобы ученики имели конкретное представление о километре, надо сообщить им расстояния в километрах между хорошо известными им местами — длину улицы, расстояние между известными зданиями и пр.

Для конкретизации меры километра можно решить несколько задач со скоростями, имея в виду, что:

Лошадь с грузом проходит .... 4 *км* в час
Лошадь с телегой пробегает .... 10 *км* „
Пассажирский поезд пробегает .... 40 *км* „
Самолет пролетает... 200 *км* „

Измерения длины на местности относятся к ранней осени и поздней весне.

2. Измерения длины в классе. Обучение труду доставляет поводы и материал для измерения длины в классе. На уроках труда учащимся приходится делать измерения и разметки. Помимо этого учитель может воспользоваться материалами и изделиями учащихся для измерения на уроках математики. Предметом для измерения длины могут служить: полки, вешалки и рамки, изготовленные детьми; лист картона, типографский лист бумаги, ткань, доски, фанера, проволока.

Для измерения длины каждый ученик должен быть вооружен лентой, вырезанной из миллиметровой бумаги, длиной в 1 *м*. На этой ленте следует отметить чернилами дециметры и сантиметры и их перенумеровать через 10 *см*, надписав 0, 10, 20, . . . 100.

Прекрасный материал для измерения доставляет построение геометрических фигур в тетради:

а) Начертить отрезок прямой, длиной в 10 *см*.

б) Начертить прямоугольник, длина и ширина которого 6 *см* и 4 *см*.

в) Начертить квадрат со стороной в 5 *см*.

г) Измерить стороны данного прямоугольника или многоугольника (с прямыми углами) и вычислить их сумму (обвод, периметр).

д) Начертить план комнаты или участка земли, имеющего форму прямоугольника (стр. 339).

е) Начертить прямоугольную диаграмму (Учебник арифметики, ч. III, стр. 28).

Измерения длины должны быть внесены в рабочий план каждой четверти.

В процессе измерения дети знакомятся с мерами, приобретают конкретное, осязательное представление о каждой мере. В целях лучшего усвоения мер полезно предлагать ученикам проводить на глазомер с последующей проверкой отрезки в 1 *м* — на доске, отрезки в 1 *дм*, 1 *см* — у себя в тетрадях. Меру миллиметр можно представить себе не только как известное деление на линейке, но и как толщину некоторого числа листов бумаги (например, 10 листов из задачника имеют толщину примерно в 1 *мм*).

Повторив меры длины, их выписывают в виде таблицы. Особенное внимание надо обратить на единичные отношения мер длины. Раздробление и превращение именованных чисел и действия над ними обнаружат перед учащимися удобства метрической системы мер. Для уразумения связи между десятичной нумерацией и метрической системой мер полезно разобрать прилагаемую таблицу (стр. 295).

Взвешивание. В первую четверть учащиеся изучают на уроках природоведения почву и на уроках труда полезные ископаемые, что дает повод для взвешивания почвы, дерева, металлов, литра воды, литра зерна и песка. Для взвешивания надо иметь весы, литровую кружку или бутылку, гири.

При взвешивании учащиеся знакомятся с разновесом и с приемами взвешивания, с чем они уже встречались на втором году. Чтобы взвесить предмет, его кладут на левую чашку весов, а на правую накладывают гири в определенном порядке.

Кладут крупную гирю, например, 500 *г*. Допустим — много, снимают ее и берут *следующую* за ней меньшую гирю — 200 *г* — мало. Кладут следующую за ней гирю в 200 *г* — много. Сняв 200 *г* кладут следующую гирю 100 *г* — мало. Следующая гиря 50 *г* — много. Следующая гиря 20 *г* — мало. Следующая — 5 *г*; положим, что чашки весов пришли в равновесие. Предмет весит 325 *г* (200 + 100 + 20 + 5 = 325). Гирьки надо класть по порядку, в противном случае трудно бывает добиться равновесия.

Нумерация, метрические единицы длины и веса.

	Миллионы	Тысячи			Единицы		
Разрядные единицы числа	Млн.	Сотн. тыс.	Дес. тыс.	Тыс.	Сотн.	Дес.	Един.
	10 сот. тыс.	10 дес. тыс.	10 тыс.	10 сот.	10 дес.	10 ед.	
	1 000 000 ед.	100 000 ед.	10 000 ед.	1 000 ед.	100 ед.		
Единицы длины	*км*			*м*	*дм*	*см*	*мм*
	100 *м* × 10	10 *м* × 10	10 *м*	10 *дм*	10 *см*	10 *мм*	
	1 000 000 *мм*	100 000 *мм*	10 000 *мм*	1 000 *мм*	100 *мм*		
Единицы веса	*т*	*ц*		*кг*			*г*
	10 *ц*	10 *кг* × 10	10 *кг*	100 *г* × 10	10 *г* × 10	10 *г*	
	1 000 000 *г*	100 000 *г*	10 000 *г*	1 000 *г*	100 *г*		

Учителю надлежит самому поупражняться во взвешивании, чтобы приобрести навык в набирании разновесов.

Чтобы у учеников образовалось осязательное представление о килограмме, нужно набрать несколько камней, весом каждый в 1 *кг* и предложить каждому из учащихся подержать в руке камень. Кроме того, полезно произвести взвешивания, имеющие практический смысл: например, отвесить килограмм воды и вымерить ее стаканом, отвесить 500 *г* хлеба, 400 *г* картофеля, 100 *г* крупы.

За этим следует составление таблиц единиц веса.

Раздробление именованных чисел. Раздробление именованных чисел есть преобразование, но не есть арифметическое действие. Термин *раздробление* уже встречался раньше, поэтому смысл его ученикам известен. Урок раздробления надо начать, конечно, с устных легких примеров, напомнив при этом смысл слова раздробление (стр. 255).

Раздробление метрических именованных чисел выполняется в уме с последующей записью результата. Раздробим, например, 35 *т* 75 *кг* в *кг*: в одной тонне 1 000 *кг*, а в 35 *т* — 35 000 *кг*; 35 000 *кг* да 75 *кг* — 35 075 *кг*. Запись:

35 *т* 75 *кг* = 35 075 *кг*.

Упражнения на раздробление можно давать в такой последовательности:

а) Единичное отношение мер равно 10.

Раздробить: 7 *м* в *дм*; 5 *дм* в *см*; 8 *см* в *мм*; 3 *м* 7 *дм* в *дм*; 4 *м* 7 *дм* 5 *см* в *см*.

б) Единичное отношение равно 100.

Раздробить: 17 *м* в *см*; 15 *м* 25 *см* в *см*; 12 *м* 7 *см* в *см*; 15 *ц* в *кг*; 12 *ц* 50 *кг* в *кг*; 10 *ц* 5 *кг* в *кг*.

в) Единичное отношение равно 1 000.

Раздробить: 12 *км* в *м*; 15 *км* 750 *м* в *м*; 17 *км* 75 *м* в *м*; 24 *т* в *кг*; 18 *т* 625 *кг* в *кг*; 15 *т* 25 *кг* в *кг*.

Превращение именованных чисел. Превращение есть преобразование одного именованного числа в другое: превратить именованное число — это значит заменить его меры более крупными мерами. Последовательность в выборе примеров на превращение такова же, как и в раздроблении.

Превращение метрических именованных чисел выполняется в уме с записью данного числа и результата. Например, превратим 25 080 *м* в километры. Мы знаем что 1 000 *м* = 1 *км*. В числе 25 080 *м* столько километров, сколько тысяч в этом числе. Поэтому 25 080 *м* = 25 *км* 80 *м*.

Сложение именованных чисел. Со сложением составных именованных чисел ученики уже знакомы (стр. 257). У них должно было выработаться понятие о том, что при сложении составных именованных чисел однородные меры соединяются, т. е. складывая, например, 5 *км* 780 *м*, 360 *м* и 1 *км* 400 *м*, мы соединяем вместе метры, а затем километры.

В сложении составных именованных чисел некоторую трудность представляет момент превращения. Сложим те же числа 5 *км* 780 *м*, 360 *м* и 1 *км* 400 *м*.

Сложим сперва 780 *м*, 360 *м* и 400 *м*. На месте единиц пишем нуль, 8 дес. да 6 дес. — 14 дес.; 4 дес. пишем, а 1 с. относим к сотням. 1 с. да 7 с. — 8 с., да 3 с. — 11 е., да 4 с. — 15 с.

5 *км* 780 *м*	
360 *м*	
1 ,, 400 *м*	
7 *км* 540 *м*	

Сколько тысяч и сотен в 15 сотнях? Где запишешь 5 сотен? 1 000 *м* — какую составляют меру? к какому числу прибавить 1 *км*? Сколько километров получится?

Примеры на сложение составных именованных чисел разобьем на следующие группы:

а) Сложение простых именованных чисел, когда сумма — составное число (680 *кг* + 750 *кг* + 220 *кг*).

б) Сложение без превращения (4 *км* 350 *м* + 3 *км* 250 *м*).

в) Сложение составного именованного числа и простого с превращением (2 *кг* 750 *г* + 250 *г*; 3 *т* 780 *кг* + 560 *кг*).

г) Сложение составных именованных чисел с превращением (7 *т* 350 кг + + 2 *т* 650 *кг*; 4 *км* 740 *м* + 2 *км* 560 *м*).

д) Сложение нескольких именованных чисел.

Вычитание именованных чисел. С вычитанием составных именованных чисел ученики уже встречались несколько раз. У них должно было

составиться представление о том, что вычитание составных именованных чисел сводится к вычитанию простых именованных чисел. Так, чтобы из числа 11 *т* 450 *кг* вычесть 5 *т* 750 *кг*, надо килограммы отнять от килограммов, а тонны от тонн. Так как вычесть 750 *кг* из 450 *кг* невозможно, то надо из 11 *т* взять 1 *т*, раздробить ее в килограммы и затем сложить 1 000 *кг* и 450 *кг*. Таким образом мы число 11 *т* 450 *кг* заменяем другим числом 10 *т* 1 450 *кг*, после чего 750 *кг* вычитаем из 1 450 *кг*. Эти рассуждения делаются попутно с вычислениями:

```
  11 т 450 кг
–  5 „ 750 кг
   5 т 700 кг
```

Из 450 *кг* нельзя отнять 750 *кг*. Занимаем от 11 *т* — одну тонну, или 1000 *кг*. 1000 *кг* да 450 *кг* составят 1 450 *кг*. Будем вычитать 750 *кг* из 1 450 *кг* и т. д.

Конечно, урок вычитания именованных чисел начнем с повторения, т. е. с простых примеров. Упражнения будем давать ученикам в такой последовательности.

а) Уменьшаемое и вычитаемое — простые именованные числа (3 *км* – 750 *м*).

б) Уменьшаемое или вычитаемое — простое именованное число (4 *т* – 2 *т* 640 *кг*; 3 *ц* 34 *кг* − 18 *кг*; 8 *ц* 35 кг − 74 *кг*).

в) Уменьшаемое и вычитаемое — составные именованные числа, вычитание без раздробления (15 *т* 780 *кг* − 7 *т* 345 *кг*).

г) Уменьшаемое и вычитаемое — составные именованные числа, вычитание с раздроблением (11 *т* 450 *кг* − 5 *т* 750 *кг*).

Умножение именованных чисел. Об умножении именованных чисел было сказано уже ранее (стр. 259).

```
2 м   5 дм
  × 15
    125
    25
    375 дм = 37 м 5 дм
```

Чтобы ученики понимали возможность и смысл умножения именованного числа на отвлеченное, следует исходить из задачи.

Для стоячей электрической лампы требуется 2 *м* 5 *дм* электрического шнура. Сколько шнура потребуется на 15 ламп?

Надо умножить 2 *м* 5 *дм* на 15. Будем умножать 25 *дм* на 15. Умножим еще 5 *кг* 35 *г* на 16. Так как сотен граммов в этом числе нет, то запишем нуль на их месте и умножим 5 035 *г* на 16.

```
5 кг 035 г
  ×  16
  30210
  5035
  80560 г = 80 кг 560 г.
```

```
15 руб. 07 коп.
         × 8
   12056 коп. = 120 руб. 56 коп.
```

Точно также умножим 5 руб. 7 коп. на 8 (стр. 297).

В конце урока надо сделать обобщения:

а) Мы умножали именованные числа на отвлеченное число.

б) В произведении получалось именованное число.

Деление именованных чисел. Это действие представляет значительные трудности, так как оно расчленяется на два вида, т. е. почти на два новых действия — деление на данное число частей и деление в смысле содержания, — которые требуют разных способов вычисления. Для овладения этими двумя видами деления существует верное средство — решение простейших примеров и задач с подробными объяснениями. Особенно важно решение задач, так как задачи раскрывают конкретный смысл того и другого вида деления. Решая задачу на деление, ученик должен указать, какой смысл имеет деление в этой задаче: „надо разделить на (столько-то) равных частей“, „надо узнать сколько раз (такое-то) число содержится в (таком-то) числе“.

При решении задач и примеров на деление, надо требовать от ученика подробных рассуждений с той целью, чтобы для него стала ясна и привычна основная мысль вычислительного процесса, которая заключается в следующем: при делении именованного числа на данное число частей чаще всего приходится делать частичное раздробление; при делении же именованного числа на именованное оба числа надо раздробить в одинаковые меры. Сделаем дидактический анализ каждого вида деления.

Делитель — отвлеченное число. Начнем с задачи: из 22 *м* материи сделали 8 одинаковых рубашек. Сколько материи пошло на рубаху?

Надо разделить 22 *м* на 8 равных частей. Разделим 22 *м* на 8 равных частей, в каждой части будет 2 *м* и 6 *м* в остатке.

6 *м* не делится на 8. Что надо сделать, чтобы деление стало возможным?

```
22 м   : 8                    42 ц 25 кг : 13
16       2 м 75 см             39           3 ц 25 кг
  600 см                         325 кг
   56                             26
   40                              65
   40                              65
```

Надо раздробить 6 *м* в сантиметры и т. д.

Сделаем еще пример — 42 *ц* 25 *кг* : 13.

Примеры и задачи будем решать в таком порядке.

а) Делимое и частное — простые именованные числа (5 *м* : 25).

б) Делимое — простое именованное число, а частное — составное (34 *кг* : 16).

в) Делимое — составное именованное число (42 *ц* 25 *кг* : 13).

Решив ряд задач и примеров, обращаем внимание учеников на особенности этого вида деления. А именно:

а) Мы делили именованное число на отвлеченное, иначе говоря, делили именованное число на равные части.

б) Частное получалось именованное.

в) При делении в некоторых примерах мы раздробляли все именованное число (3 руб. 25 коп. : 25) в некоторых же только часть его (27 руб. 50 коп. : : 25).

Делитель — именованное число. И этот вид деления начнем с задач:

Яблоко стоит 25 коп. Сколько яблок можно купить на 75 коп.? На 1 руб.? На 3 руб.? На 3 руб. 75 коп.?

Решим здесь последнюю задачу:

Яблок можно купить столько, сколько раз 25 коп. содержится в 3 руб. 75 коп. Разделим 3 руб. 75 коп. по 25 коп. Чтобы узнать, сколько раз 25 коп. содержится в числе 3 руб. 75 коп., надо оба данных числа раздробить в копейки. Раздробим 3 руб. 75 коп. в копейки, получим 375 коп. Теперь будем делить 375 на 25 и т. д.

```
3 р. 75 к. : 25 к.
   375 к.    15
   25
   125
   125
```

```
77 ц 40 кг : 2 ц 15 кг = 7740 кг : 215 кг
                         645        36
                         1290
                         1290
```

Решим еще пример: 77 *ц* 40 *кг* : 2 *ц* 15 *кг*. Надо узнать, сколько раз 2 *ц* 15 *кг* содержится в числе 77 *ц* 40 *кг*. Для этого оба числа раздробим в килограммы.

Примеры и задачи будем решать в такой последовательности:

а) Делимое и делитель — простые именованные числа (6 *т* : 250 *кг*).

б) Делимое составное именованное число, делитель простое (10 *т* 200 *кг* : : 680 *кг*).

в) Делимое простое именованное число, делитель — составное (20 *т*: 1 *т* 250 *кг*).

г) Делимое и делитель — составные именованные числа (77 *ц* 40 *кг* : 2 *ц* 15 *кг*).

Сделаем некоторые выводы:

а) Мы делили именованное число на именованное. Иначе сказать, мы узнавали, сколько раз одно именованное число содержится в другом.

б) Частное получалось отвлеченное.

в) При делении мы раздробляли оба числа в одинаковые меры.

Измерение времени и решение задач на время.

Меры времени. На третьем году необходимо повторить меры времени, пополнив сведения учащихся знакомством с секундой и столетием. Начать лучше с суток и года. Сутки — это то время, в которое каждая точка земли совершает полный оборот; год — это время, в которое земля совершает полный оборот вокруг солнца.

Этот оборот она делает в $365\frac{1}{4}$ суток.

Считать в году $365\frac{1}{4}$ суток неудобно, и поэтому принимают, что три года подряд содержат по 365 суток, а четвертый 366 суток, так как

$$365\frac{1}{4} + 365\frac{1}{4} + 365\frac{1}{4} + 365\frac{1}{4} = 365 + 365 + 365 + (365 + 1).$$

Год в 365 суток называется простым, а в 366 суток — високосным. Каждый четвертый год — високосный. Таким образом високосными годами будут 1936, 1940 г. и т. д.

Сутки начинаются в полночь и разделяются на 24 часа: от полуночи до полудня проходит 12 час., от полудня до следующей полуночи — также 12 час.

Время после полуночи называется временем пополуночи (или утра). Время после полудня до следующей полуночи называется временем пополудни (или вечера). К третьему году учащиеся должны научиться бегло и верно читать время по часам. Зная, что в сутках 24 часа, они должны уметь отсчитывать часы не только от полуночи до полудня и от полудня до полуночи, но и от полуночи до следующей полуночи. Другими словами, они должны понимать, что 2 часа пополудни — это 14 часов, 6 часов вечера — это 18 часов и т.д.

Час содержит 60 минут, минута — 60 секунд. Чтобы учащиеся ясно представили себе эти малые промежутки времени, полезно провести с ними по часам „минуту тишины“. Затем можно предложить им, не глядя на часы, сидеть молча в течение одной, двух, трех минут. По окончании опыта учитель объявляет, насколько дети ошиблись. Точно также можно отсчитывать по часам и без часов промежутки времени в несколько секунд.

Время, как величину, и меры времени можно сделать осязательными только при помощи задач, близких к жизни ученика. И самое изучение мер времени может быть поставлено в связь с задачами. Так, решая задачи на время с целыми годами, сообщаем ученикам сведения о столетии и годе; решая задачи в пределе года, рассказываем им о сутках и месяце; наконец, занимаясь задачами в пределах суток, напоминаем о часе, минуте и секунде.

Производя действия с именованными числами, заключающими меры времени, полезно сопоставлять их с действиями над метрическими именованными числами, для того, чтобы показать преимущество последних.

Раздробление и превращение именованных чисел, выражающих время. Примеры на раздробление именованных чисел, выражающих время, можно расположить в такой последовательности:

а) 5 сут. в часы; 7 сут. 12 час. в часы.

б) 8 час. в минуты; 7 час. 45 мин. в минуты; 12 мин. в секунды; 15 мин. 45 сек. в секунды.

Раздробление метрических именованных чисел выполняется, как было уже сказано, в уме с записью данных и результата.

Сделаем раздробление числа, выражающего время, например, 17 сут. 15 час. в часы:

17 сут. 15 час. = 423 час.

24 ч.	408 ч
17	+ 15 ч.
168	423 ч
24	
408 ч.	

Упражнения на превращения можно располагать в такие группы: а) результат — простое именованное число; в) результат — составное именованное число с двумя и с тремя мерами.

Превратим 636 час. в сутки:

636 час. = 26 сут. 12 час.

636 ч. :	24 ч.
48	26 (сут.)
156	
144	
12 ч.	

Чтобы узнать, сколько суток составляют 636 часов, надо узнать, сколько раз в этом числе содержатся 24 часа. Ответ: 26 раз и 12 час. в остатке. Значит 636 час. = 26 сут. 12 час.

Сложение и вычитание составных именованных чисел, выражающих время. Сложение и вычитание именованных чисел, выражающих время, уже встречалось детям на втором году обучения. Но тогда это было сложение без превращения и вычитание без раздробления мер. Теперь надо научиться складывать и вычитать любые именованные числа, выражающие время.

Вот образцы записи таких более трудных случаев сложения и вычитания:

а)
```
   5 сут. 17 ч.
+ 7  ,,   15 ,,
  12 сут. 32 ч.
  13 сут.  8 ч.
```

б)
```
   8 ч. 45 м.
+ 7 ,, 38 ,,
  15 ч. 83 м.
  16 ч. 23 м.
```

в)
```
  .        30
 10 сут.  ~~6~~ ч.
– 6  ,,   14 ,,
  3 сут. 16 ч.
```

г)
```
  .        78
  5 мин. ~~18~~ сек.
– 2  ,,   35  ,,
  2 мин. 43 сек.
```

При сложении рассуждаем так: 17 час. да 15 час. — всего 32 часа; 5 сут. да 7 сут. — всего 12 суток; 32 часа — это 1 сутки 8 час. Пишем в ответе 8 час.; 1 сутки прибавляем к 12 суткам и получаем всего 13 сут. 8 час.

В другом примере складываем минуты с минутами, часы с часами. Полученные 83 мин. превращаем в часы. Получаем 1 час 23 мин., а всего 16 час. 23 мин.

При вычитании от 6 час. нельзя отнять 14 час. Занимаем у числа суток целые сутки, раздробляем сутки в часы и складываем 24 часа и 6 час. От полученных 30 час. отнимаем 14 час., от оставшихся 9 суток — 6 суток. Получится всего 3 сут. 16 час.

В другом примере приходится у числа минут занять целую минуту и раздробить ее в секунды. Вместо 18 сек. будем иметь 78 сек., вместо 5 мин. — 4 мин. Получаем в остатке 2 мин. 43 сек.

И здесь, как при раздроблении и превращении, необходимо обратить внимание учащихся на преимущества метрических мер перед мерами времени: при сложении и вычитании метрических мер нет надобности 2 раза писать ответ, так как превращение и раздробление совершается попутно, в процессе вычислений.

Умножение и деление составных именованных чисел, выражающих время. При умножении составных именованных чисел, выражающих время, можно располагать запись действия следующим образом:

а)
```
 5 сут.  18 ч. × 7
35 сут. 126 ч
40 сут.   6 ч.
```

б)
```
13 ч. 27 м. × 18 = 10 сут. 2 ч. 6 м.
104                216
13                 27
234 ч.             486 м. : 60 м.
+ 8 ,,             480      8 (час.)
242 ч. : 24 ч.       6 м.
24       10 (сут.)
2 ч.
```

Как мы видим, при двузначном множителе запись умножения становится очень громоздкой. Не следует затруднять учащихся решением большого числа таких примеров, тем более, что эти упражнения по существу мало жизненны. В самом деле, трудно придумать основания для многократного повторения слагаемым одного и того же промежутка времени.

В делении именованных чисел, как уже известно детям, различают два вида: деление именованного числа на отвлеченное и деление именованного числа на именованное. С учениками следует решить по несколько примеров на один и другой вид деления, располагая вычисления следующим образом:

Первый вид деления:

101 сут. 6 час. : 18
90 264 ,, 5 сут. 15 час.
11 270 час.
×24 18
44 90
22 90
264 час.

Второй вид деления:

2 сут. 19 час. 30 мин.: 3 час. 45 мин. = 18
24 × 2 = 48 60 × 3 = 180
48 + 19 = 67 180 + 45 = 225 (мин.)
67 · 60 = 4020
4020 + 30 = 4050 (мин.)
4050 мин. : 225 мин.
225 18
1800
1800

Задачи на время. На втором году обучения дети решали такие задачи на время, в которых искомый и данный промежуток времени меньше суток. На третьем году обучения к этим задачам присоединяются задачи, относящиеся к промежуткам времени в пределах года и к промежуткам времени больше года. В задачах последнего рода время выражается в целых годах, без месяцев и дней.

В задачах на промежутки времени меньше года, мы ограничимся одним случаем: даны начало и конец события, вычислить его продолжительность. Например:

Пароходы ходили по реке с 15 апреля по 12 ноября. Сколько времени продолжалась навигация?

Рассуждаем так: от 15 апреля по 1 мая (не считая день 15 апреля) прошло 15 дней. Дальше будем считать дни по месяцам: май — 31 день, июнь — 30 дней, июль — 31 день, август — 31 день, сентябрь — 30 дней, октябрь — 31 день. С 1 ноября по 12 ноября (считая зтот день), прошло 12 дней. Сложим все эти промежутки времени:

15 д. + 31 д. + 30 д. + 31 д. + 31 д. + 30 д. + 31 д. + 12 д. = 211 дней.

Возьмем другую задачу:

Переход по льду установился 28 ноября и продолжался до 15 марта. Сколько времени можно было переходить реку по льду?

Рассуждаем так: от 28 ноября по 1 декабря прошло 2 дня, в декабре — 31 день, в январе — 31 день, в феврале — 28 дней, в марте — 15 дней, а всего:

2 д. + 31 д. + 31 д. + 28 д. + 15 д. = 107 дней.

Если год назван, будем различать, високосный он или простой. Если год не назван, будем считать в феврале 28 дней.

В тех случаях, когда промежутки времени исчисляются полными годами, решаются задачи трех родов: 1) даны начало и конец события, надо вычислить его продолжительность; 2) даны начало события и его продолжительность, вычислить его конец и 3) даны продолжительность события и его конец, вычислить его начало. Во всех этих случаях можно заменять числительные порядковые числительными количественными, другими словами, вести счет лет от начала нашей эры, но можно и не делать этого. Рассмотрим подробнее способы решения указанных выше задач.

1. Задача первого рода:

Ленин родился в 1870 году и умер в 1924 году. Сколько лет жил Ленин?

Рассуждаем так:

Ленин родился в 1870 году. К этому времени от начала нашего летосчисления прошло полных 1869 лет. Умер Ленин в 1924 году, когда от начала летосчисления прошло полных 1923 года. Спрашивается, на сколько больше лет прошло до смерти Ленина, чем до его рождения. Вопрос этот, как известно, решается вычитанием. Решение можно записать „в столбик“.

а) 1923 г.
– 1869 л.
54 г.

б) 1924 г.
– 1870 л.
54 г.

Тот же ответ получим, если от 1924 лет отнимем 1870 лет. Итак, числительные порядковые можно не заменять количественными.

2. Задача второго рода:

Крепостное право в России было отменено в 1861 году, а через 44 года после этого произошла первая революция. Когда произошла в России первая революция?

По примеру предыдущей задачи, ответ можно найти двумя способами:

а)		б)	
	1860 л.		1861 г.
	+ 44 г.		+ 44 г.
	1904 г.		1905 г.

В первом случае рассуждаем так: От начала нашего летосчисления до отмены крепостного права в России прошло полных 1860 лет, а до первой революции еще 44 года, всего 1904 полных года. Значит, первая революция была в 1905 году. Тот же ответ получим сразу, если к 1861 году прибавим 44 года.

3. Задача третьего рода:

Карл Маркс родился за 87 лет до первой революции в России, которая произошла в 1905 году. Когда родился Карл Маркс?

Вот два способа решения этой задачи:

а)		б)	
	1904 г.		1905 г.
	– 87 л.		– 87 л.
	1817 л.		1818 г.

В первом случае надо полученное число — 1817 лет — заменить числительным порядковым: прошло полных 1817 лет; значит, Карл Маркс родился в 1818 году. Во втором случае сразу получим в ответе числительное порядковое: 1818-й год.

ЗАДАЧИ НА ТРЕТЬЕМ ГОДУ ОБУЧЕНИЯ.

Общие замечания. При решении сложных задач на третьем году обучения особенно сильно скажется недостаточность подготовки учащихся, если в первом и во втором классе на решение задач обращалось мало внимания. Задачи на третьем году затрудняют учащихся не только своей относительной замысловатостью, но и своими большими числами, своей более серьезной тематикой. В это время уже поздно было бы учить детей выбору действия или пониманию таких выражений, как больше или меньше на столько-то или во столько-то раз. Все эти этапы должны быть пройдены и усвоены в предшествующих классах. Вот почему, знакомясь с методикой решения задач на третьем году обучения, учитель должен внимательно просмотреть все, что касается этого вопроса на первом и втором году обучения (см. стр. 146 и стр. 230) и прежде всего тщательно восполнить возможные у учащихся пробелы. Только после этого можно двигаться дальше в соответствии с теми методическими указаниями, которые уже прямо относятся к третьему году обучения.

Анализ и синтез при решении сложной задачи. Как уже указывалось, решая сложную задачу, мы разлагаем ее на простые задачи, выбираем действия для каждой из этих задач и проводим вычисления. Разложим на элементы мыслительный процесс, который совершается при составлении плана решения задачи в несколько действий. Для этого составим план следующей задачи:

Требуется оштукатурить 96 кв. *м* стены. Материала на 1 кв. *м* стены идет на 24 коп. Штукатур успевает оштукатурить за 1 день 24 кв. *м* стены и получает за это 8 р. 50 к. Во что обойдется штукатурка?

Набросаем здесь предположительно те соображения, которые то сознательно, то безотчетно могут возникнуть у ученика при составлении плана задачи.

Он перебирает данные: 96 кв. *м* — площадь стен; 24 коп. стоит материал на 1 кв. *м*; 8 р. 50 к. уплачивают штукатуру за день работы. Сопоставляя эти данные по два — 96 кв. *м* и 24 кв. *м*, 96 кв. *м* и 24 к.; 96 кв. *м* и 8 р. 50 к. и т. д., ученик сохраняет в своей памяти только те сопоставления, которые могут оказаться полезными при решении задачи.

Например, данные 96 кв. *м* и 24 кв. *м* позволяют узнать число дней работы; а так как штукатур берет по 8 р. 50 к. в день, то мы получаем полезное сопоставление, потому что эти числа дают возможность узнать стоимость работы; зная же стоимость работы и материала, можно вычислить стоимость штукатурки, т. е. ответить на вопрос задачи.

Теперь нам надо пристально всмотреться в эти соображения. В одних случаях ученик исходит от данных задачи и к ним подбирает вопросы. Например, зная, что потолок имеет площадь 96 кв. *м* и что штукатур в день может оштукатурить 24 кв. м, ученик может узнать, сколько дней на это потребуется. Этот процесс рассуждения называется синтетическим (стр. 32).

В других случаях ученик исходит от вопроса задачи, подбирая к этому вопросу предположительно те данные, при помощи которых можно было бы найти решение. Этот способ суждения требуется, чтобы оценить, полезно ли то или иное сопоставление данных чисел. Например, надо ли нам знать, сколько дней потребуется штукатуру на работу? Чтобы узнать, во что обойдется штукатурка потолка, надо знать, сколько дней потребуется на работу. Такой способ рассуждения, при помощи которого находят связь вопроса задачи с ее данными, исходя из ее вопроса, называется аналитическим (стр. 32).

Синтетический способ составления плана. Вырабатывая с учащимися план решения задачи, мы держимся обыкновенно синтетического спосо-

ба, т. е. исходя от данных, подбираем вопросы. Решим задачу о штукатурке стены.

Учт. Что требуется в задаче узнать? *Учн.* Во что обойдется штукатурка стены.

Учитель объясняет, что для вычисления всех расходов надо знать, сколько будет стоить материал — известь, песок, глина, и сколько будет стоить работа. Затем повторяют вкратце содержание задачи: требуется оштукатурить 96 *кв. м* стены; на 1 *кв. м* идет материала на 24 коп.; штукатуру платят поденно по 8 р. 50 к. в день; за один день он успевает оштукатурить 24 *кв. м* стены.

```
   24 коп.
 × 96
  144
 216
2304 коп. = 23 р. 4 к.
```

Учт. Что мы можем сначала узнать? *Учн.* Узнаем, сколько стоит материал. Для этого 24 коп. умножим на 96.

Учт. Почему 24 коп. ты умножаешь на 96?

Учн. Потому что материал на 1 *кв. м* стены обходится в 24 коп., а площадь стены 96 *кв. м.*

Учт. Дальше что узнаем? *Учн.* Сколько дней проработает штукатур. Для этого надо узнать, сколько раз 24 *кв. м* содержится в 96 *кв. м* или 96 разделить на 24.

96 *кв. м* : 24 *кв. м* = 4 (дня).

Учт. Что можем еще узнать? *Учн.* Мы можем узнать, сколько стоит работа. Для этого 8 р. 50 к. умножим на 4.

Учт. Почему надо 8 р. 50 к. умножить на 4?

Учн. Потому что за один день работы штукатуру платят 8 р. 50 к., а всех дней он проработает 4.

8 р. 50 к. × 4 = 34 руб.

Учт. Что потом узнаем? *Учн.* Сколько будет стоить штукатурка.

Учт. Как мы это узнаем? *Учн.* Надо сложить 23 р. 4 к. и 34 р.

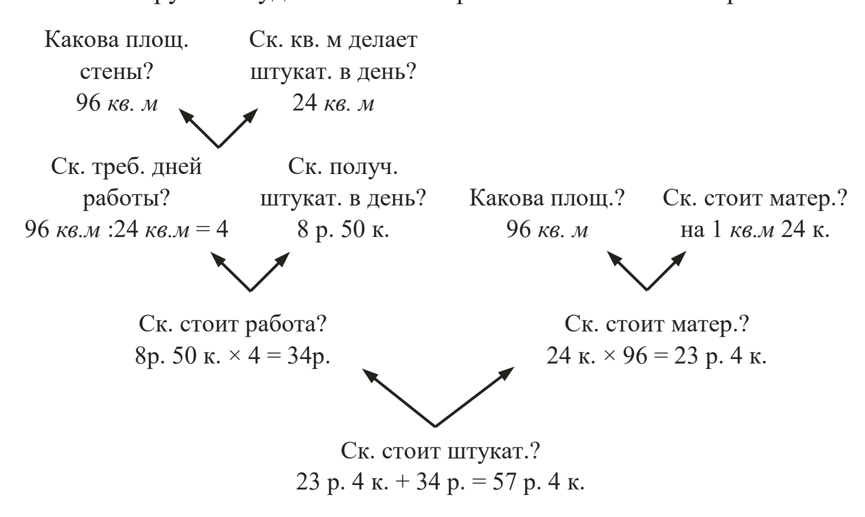
```
23 р. 4 к.
34 р.
57 р. 4 к.
```

Надо отдать себе отчет в том, что оценка целесообразности при сопоставлении тех или других двух данных, когда план вырабатывается синтетически, в явном виде не производится, а предоставляется подсознательной или полусознательной деятельности ученика. Так, например, мы не спрашиваем ученика, отчего он из 4 данных задачи выбрал вначале 96 *кв. м* и 24 *кв. м* и составил к ним соответствующий вопрос; суждение об этом при синтетическом способе составления плана совершается безмолвно, без участия учителя.

Частичный анализ. Вырабатывая план решения задачи, можно держаться в общем синтетического процесса, контролируя его данными анализа, пользуясь, если можно так выразиться, частичным анализом или аналитико-синтетическим методом. Для решения задачи необходимо знать, во что обойдется работа; штукатур получает но 8 р. 50 к. в день, а сколько дней он проработает, неизвестно. Но в задаче сказано, что площадь стены 96 *кв. м* и что в день штукатур делает 24 *кв. м* стены, поэтому сначала узнаем, сколько дней работы потребуется и т. д. Таким образом, исходя из вопроса задачи,

мы подтверждаем и в то же время выясняем целесообразность первого вопроса нашего плана. В том случае, когда это в явной форме не делается, соответствующий аналитический процесс проис-ходит безмолвно в голове ученика, если ученику ясен ход решения. Если ему ход решения не ясен, то он слепо следует мыслью за работой составления плана и начинает его вполне понимать только тогда, когда план подходит к концу, когда, таким образом, обнаруживается целесообразность поставленных вопросов. В этом и заключается главный недостаток чистого синтетического метода. Наоборот, когда синтетический метод дополняется моментами анализа, ход решения задачи все время ясен ученику. Кроме того, аналитический метод, наводя учащихся на исследовательский, изобретательский путь решения задачи, развивает их мышление.

Аналитический способ составления плана. Наконец, может быть и чисто аналитический процесс составления плана задачи. Покажем его на той же задаче о штукатурке комнаты. В задаче требуется узнать, во что обойдется штукатурка. Запишем этот вопрос (см. ниже последний вопрос в схеме плана). Мы решим этот вопрос, если будем знать: сколько рублей будет стоить работа и сколько рублей будет стоить материал. Запишем эти вопросы.



Чтобы вычислить, сколько стоит работа, надо знать: сколько дней будет работать штукатур и сколько он получает в день. Запишем эти вопросы.

Сколько получает штукатур в день — мы знаем, и эту сумму запишем. Чтобы вычислить, сколько дней он будет работать, надо знать площадь стен, а также сколько квадратных метров он делает в день. И то и другое мы знаем. Запишем эти числа.

Нам надо вычислить еще, сколько стоит материал. Но для этого нам должно быть известно, сколько стоит материал на 1 кв. *м* и какова площадь потолка. Оба числа известны, запишем их.

Составляя ход решения задачи, мы писали вопросы снизу вверх. Решая задачу, пойдем по тем же вопросам сверху вниз.

Узнаем, сколько дней будет работать штукатур. Он может оштукатурить в день 24 кв. *м* стены, а площадь стены 96 кв. *м*. Поэтому надо разделить 96 на 24, так как надо узнать, сколько раз 24 кв. *м* содержится в 96 кв. *м* и т. д.

Сопоставление различных способов составления плана. Расценим с дидактической стороны изложенные выше способы решения задач. Синтетический процесс находит чаще всего приложение при решении задач. Он немногословен. Составление плана сопровождается вычислениями, которые вводят в задачу новые числовые данные, облегчающие решение. Его недостаток — кажущаяся случайность, отсутствие мотивировки при составлении плана.

Аналитико-синтетический (частичный анализ) процесс обладает всеми преимуществами синтетического процесса и свободен от его недостатков. Этим процессом надо пользоваться всегда, когда у преподавателя нет уверенности, что ученику план решения задачи с самого начала ясен.

Наконец, аналитический процесс приучает ученика к строгой последовательности мышления. Но он, вследствие своей отвлеченности и многословности, весьма утомителен. Анализ не может сопровождаться вычислениями, как синтез; поэтому, пока учащиеся составляют план аналитически, они в большей части анализа опираются не на конкретные числовые данные, а на отвлеченные их названия. Анализ, проводимый последовательно, через всю задачу, не может найти себе частого применения в начальной школе.

Подготовка учащихся к решению сложных задач. Главным условием успешного решения сложных задач на третьем году обучения является правильная постановка работы в предшествующих классах.

Подготовить учащихся к решению сложных задач в несколько действий — это значит прежде всего научить их выбирать действия для простых задач, на которые приходится расчленять сложную задачу. Чтобы выбрать действие, учащийся должен владеть общим понятием каждого действия и уменьем подводить под него конкретные вопросы. Поэтому решение разнообразных простых задач, в особенности таких, в которых выбор действия затруднителен, необходимо проводить настойчиво не только на первом, но и на втором году.

Разыскивая ход решения задачи, ученик пользуется синтетическим и аналитическим процессами рассуждения, которые большею частью протекают быстро, в нерасчлененном виде. Так как эти процессы для решения задачи

весьма важны, надо подготовить к ним учащихся. Это тоже достигается специальными упражнениями, которые проводятся на первом и втором году обучения и о которых в свое время было сказано. Это неполные задачи, в которых к данным требуется подобрать вопрос и обратно — к вопросу данные. Образцы таких задач приводились выше (см. стр. 153).

Решая задачу, ученик должен различать данные числа и вопрос задачи, так как должен уметь указывать, что ищется в задаче и что известно. Эти навыки необходимо также прививать детям с первых шагов обучения арифметике.

Чтобы легче было понять зависимость между входящими в задачу величинами, полезно записывать данные задачи в виде схемы. Такого рода записи можно вводить уже на втором году обучения (см. стр. 234). Разобранную выше задачу можно было бы написать на доске так:

96 *кв. м* стен; матер, на 1 *кв. м* — 24 к.
24 *кв. м*. „ в 1 день; за 1 д. раб. — 8 р. 50 к

Во что обойдется штукатурка?

Следует приучить ученика записывать данные задачи в виде схемы даже тогда, когда он решает задачу, имея перед собой задачник.

Чтобы учащиеся поняли необходимость расчленения сложной задачи на несколько простых, полезно подбирать простые задачи таким образом, чтобы из них можно было составить сложную задачу. Сначала решаются простые задачи, а затем составленная из них сложная (стр. 153). Полезно также решать с учащимися группы задач постепенно усложняющихся (стр. 231). Усложнение задач — верный путь к тому, чтобы овладеть уменьем решать сложные задачи. Этим приемом можно пользоваться на всех четырех годах обучения, видоизменяя его соответственно возрасту и развитию учащихся.

Затруднения при составлении плана решения задачи. Когда учащийся испытывает затруднение при решении задачи, точнее говоря, при выделении из нее какого либо из вопросов, то его надо подвести к этому вопросу. Сделать это можно двумя способами — аналитическим и синтетическим. Допустим, что учащийся, решая задачу, предложенную на стр. 306, затрудняется выделить из нее первый вопрос. Применим аналитический способ наведения его на этот вопрос, не производя подробного анализа.

Учт. Что требуется в задаче узнать? *Учк.* Во что обойдется штукатурка.

Учитель объясняет, что при штукатурке стен приходится платить за материал и работу.

Учт. При уплате штукатуру за его труд — что надо знать? *Учн.* Сколько дней он работал и сколько берет за день работы.

Учт. Сколько же он берет в день? Знаем ли мы сколько дней он должен проработать? Пересмотрите числа, данные в задаче, не можем ли мы узнать, сколько дней он должен работать? И т. д.

Такое наведение может быть названо, как мы уже видели, частичным анализом.

Однако вместо частичного анализа применяют в затруднительные моменты и синтетический способ, указывая на те данные, к которым надо составить вопрос задачи.

Учт. Какова площадь потолка? Сколько кв. метров потолка успевает оштукатурить в день штукатур?

Что мы можем узнать, зная эти числа?

Как видим, эти вопросы подсказывают ответ ученику, не выясняя истинной причины, отчего мы обратили наше внимание именно на эти данные.

Иногда дети испытывают затруднения при объяснении решения задачи, не умея точно формулировать вопрос. Это происходит от того, что речь их еще не выработана. Преподаватель должен чутко относиться к ответам учащихся, чтобы не отвергнуть верной мысли, когда она бывает скрыта в неверной или неточной фразе. В этих случаях следует просить ученика, чтобы он назвал действие. Если действие названо верно, то есть большая вероятность, что и мысль его верна. При некоторой настойчивости учителя язык учащихся будет обогащаться, а объяснения их будут становиться все более и более правильными.

Требования, предъявляемые к учащимся при решении сложных задач. При объяснении решения сложной задачи от учащихся требуется, чтобы они сказали:

а) Вопрос каждой простой задачи.

б) Данные этого вопроса и действие.

в) Результат действия.

Допытываться еще, как ученики произвели вычисление, нет основания. Этот вопрос осложнил бы и без того сложные объяснения. Такого рода требование уместно, когда задача предлагается при изучении механизма какого либо действия или вычислительного приема.

Решим задачу:

В двух кусках 72 *м* одинаковой материи. Один кусок стоит 140 руб., другой 112 руб. Сколько метров в каждом куске?

Учт. Первый кусок материи стоит 140 руб. Какого числа не хватает, чтобы узнать сколько в нем метров?

Учк. Если бы мы знали, сколько стоит один метр, мы бы узнали сколько метров в куске.

Учт. В обоих кусках 72 метра. Какого числа не хватает, чтобы узнать сколько стоит 1 *м* материи?

Учк. Мы не знаем, сколько стоят оба куска.

Учт. Что же мы должны узнать сначала?

Учк. Узнаем, сколько стоят оба куска.

Учт. Как ты это узнаешь?

Учк. Первый кусок стоит 140 руб.; второй 112 р. Чтобы узнать, сколько стоят оба куска, надо сложить 140 и 112 руб.

Учт. Сложите 140 р. и 112 р. Сколько получится?

Учк. 252 руб.

140 р. + 112 р. = 252 руб. и т. д.

Когда задача решена, один из учеников повторяет связно все решение.

Узнаем, сколько стоят оба куска материи. Первый кусок стоит 140 р., а второй 112 р. Чтобы узнать, сколько стоят оба куска, сложим 140 р. и 112 р. Получим 252 руб.

Затем узнаем, сколько стоит 1 *м* материи. Мы знаем, что 72 метра материи стоят 252 руб. Чтобы узнать, сколько стоит 1 *м*, надо 252 р. Разделить на 72 равные части. Получится 3 р. 50 к.

Узнаем далее, сколько метров в первом куске. Первый кусок стоит 140 р., а 1 *м* стоит 3 р. 50 к. Узнаем, сколько раз 3 р. 50 к. содержится в 140 р., для этого разделим 14000 на 350. Получим 40.

Последним действием узнаем, сколько метров во втором куске. В обоих кусках 72 *м*, в первом куске 40 *м*. Чтобы узнать, сколько метров во втором куске, вычтем 40 *м* из 72 *м*, получится 32 *м*. Во втором куске 32 метра.

В иных задачах полезно проверять ответ:

3 р. 50 к. × 40 = 140 р.
3 р. 50 к. × 32 = 112 р.

Устные задачи. Устными называют такие задачи, при решении которых вычисления выполняются в уме.

Существуют следующие формы проведения этих задач в классе.

1. Задачу решает вся группа учащихся под руководством учителя. Каждое действие дети выполняют в уме и после опроса записывают на доске и в тетради.

2. Задачу решает каждый ученик самостоятельно, втихомолку. Действия записывают в тетради, но вычисления выполняют в уме. После того как задача большинством решена, идет проверка с подробными объяснениями.

3. Задачу решает каждый ученик самостоятельно устно и без всяких записей. В этом случае предложенная задача должна иметь числа, удобные для устных вычислений. На решение задачи дают 5 —6 минут, после чего переходят к совместному решению ее целым классом с подробными объяснениями.

Действия, выполняемые устно, записывают всегда в строчку.

Письменные задачи. Письменными называют такие задачи, при решении которых вычисления выполняются письменно — на доске или на бумаге, т. е. задачи с числами любой величины.

Обычно письменную задачу решает весь класс, руководимый учителем. После беглого разбора содержания задачи один из учеников формулирует вопрос, другой называет данные числа в этом вопросе и действие. Один из учащихся выполняет действие на доске, прочие — в своих тетрадях. Полученные ответы сравнивают, ошибки исправляют. После этого переходят к следующему вопросу задачи и т. д. Когда задача решена, один из учеников вкратце повторяет все решение в целом.

Иногда предлагают задачу для самостоятельного решения в классе с последующей коллективной проверкой. Для этого выбирают задачу по типу близкую к другой, уже решенной в классе, задачи. Если задача решается

двумя способами, то следует эти способы сравнить, чтобы затем отдать предпочтение более удобному.

Покажем здесь форму записи, наиболее употребительную при решении письменных задач. Вернемся к задаче о двух кусках одинаковой материи:

В двух кусках 72 *м* одинаковой материи. Один кусок стоит 140 руб., другой — 112 руб. Сколько метров в каждом куске?

Решение: 1) Сколько стоят оба куска материи?

140 р.+ 112 р. = 252 р.

2) Сколько стоит 1 *м* материи?

252 р.	: 72
216	3 р. 50 к.
3600 к.	
360	

3) Сколько метров в первом куске?

14000 к.	: 350 к.
1400	40 (*м*)

4) Сколько метров во втором куске?

72 *м* – 40 *м* = 32 *м*

Ответ: 40 *м* и 32 *м*.

Записывание вопросов задачи желательно, так как оно помогает отчетливее представить и выразить расчленение задачи. Но требовать от учащихся, чтобы они решение каждой задачи сопровождали записью вопросов, нецелесообразно, так как запись отнимает от ученика немало времени.

Прежде всего нет необходимости записывать вопросы задач, решаемых в классе под руководством учителя.

Из задач, которые ученики решают самостоятельно на уроках или дома, могут быть освобождены от записи вопросов те, которые легче и проще других.

Не следует требовать списывания с задачника текста задачи перед ее решением. Достаточно обозначить ее номер.

В связи с записью действий возникает вопрос, необходимо ли сопровождать числа сокращенным обозначением наименований единиц. На этот вопрос мы встречаем противоположные ответы: одни говорят, что действия производятся над отвлеченными числами, а поэтому наименования запи-

сывать не следует, даже говорят, что такая запись „безграмотна“; другие, и при этом большинство авторов методических руководств находят запись наименований единиц полезной и необходимой. В самой математике нет и не может быть по этому поводу противопоказаний, так как конкретная арифметическая задача относится уже к области прикладной математики, в которой на каждом шагу встречаем символы размерности в записях действий, как например: $20\ см^2 \times 10\ см = 200\ см$. Или еще: $20\ дм^2 \times 10\ см = 200\ дм^2 \cdot см$. Поэтому вопрос о записи наименований следует решать только с точки зрения психологической их целесообразности.

Мышление детей в возрасте приблизительно до 12 лет конкретно. Для них понятно то, что образно. Ускорять искусственно их умственное развитие нецелесообразно: „природа хочет, чтобы дети были детьми“ (Руссо). По этим соображениям выгоднее, чтобы дети, например, наряду с отвлеченной и обобщенной фразой *разделить на три*, пользовались более конкретными и образными выражениями *разделить на три равные части*, и *разделить по три*, или *три содержится*. По тем же мотивам для живости представления хода решения задачи выгоднее, чтобы наименования единиц были записаны.

Один взгляд на две записи решения одной и той же задачи убеждает нас в этом:

Образная запись:	*Слепая запись:*
1) 140 р.+ 112 р. = 252 р.	1) 140 + 112 = 252
2) 252 р. : 72 216 — 3 р. 50 к. 3600 к. 360	2) 252 : 72 216 — 350 3600 360
3) 14000 к. : 350 к. 1400 — 40 (*м*)	3) 14000 : 350 1400 — 40
4) 72 *м* – 40 *м* = 32 *м*.	4) 72 – 40 = 32

Расположение задач по степени их сложности и трудности. Располагая задачи по степени их сложности и трудности, можно руководствоваться различными признаками:

1. Первый признак — число действий. Чем больше требуется действий для решения задачи, тем ее решение труднее.

2. Второй признак составляет расположение данных чисел: если числа задачи расположены так, что действия, которыми она решается, следуют

за ними, то решение такой задачи не затрудняет учащихся. В противном случае ее решение труднее.

Задачи первого рода А. И. Гольденберг называл „прозрачными“, а С. И. Шохор-Троцкий „приведенными“.[1]

Задача первого рода:

Молотилка намолотила за 3 дня 60 *ц* зерна, намолачивая в час 240 *кг*. В первый день она работала 9 ч. 35 м., во второй — 8 ч. 15 м. Сколько часов работала она в третий день?

Задача второго рода:

Молотилка намолотила за 3 дня 60 *ц* зерна. В первый день она работала 9 ч. 35 м. во второй — 8 ч. 15 м. Сколько часов работала молотилка в третий день, если она намолачивала в среднем 240 *кг* в час?

Очевидно решение задачи в первой ее формулировке, легче, чем во второй. Когда задача сформулирована так, что простые задачи ее не следуют по порядку за данными в ней числами, то ученик должен мысленно перегруппировать их, произведя мысленно же анализ задачи, что составляет некоторую трудность. Этой трудности избегать не следует: задачи второго рода необходимо предлагать учащимся, конечно, после того, как учащиеся приобрели некоторый навык в решении задач первого рода.

3. Третьим признаком бо́льшей или меньшей трудности задачи служит наличие в ней понятий, которые усваиваются детьми с некоторым трудом, как например, выражений *больше или меньше во столько то раз*; по данной части числа найти все число; неявные формы действий и др.

4. Четвертый признак, по которому можно судить о трудности задачи, составляет присутствие в ней терминов и фактов, мало знакомых детям. Например, паровоз с тендером, плотина со шлюзом, Турксиб, американский фермер и др. Все подобные выражения и названия затрудняют понимание задачи, требуя дополнительных разъяснений.

5. Особые трудности заключают, так называемые, алгебраические задачи, т. е. задачи, которые просто и естественно решаются при помощи уравнений и трудно и искусственно решаются арифметически. Примером таких задач может служить следующая задача:

Для школы купили 75 книг для чтения и 45 задачников за 126 р. 75 к. Книга для чтения и задачник вместе стоят 1 р. 95 к. Сколько стоит книга для чтения и сколько стоит задачник?

А р и ф м е т и ч е с к о е   р е ш е н и е. Так как мы знаем, сколько стоят книга для чтения и задачник вместе, то мы можем из суммы 126 р. 75 к. исключить

---

[1] С. И. Ш о х о р - Т р о ц к и й. — Методика начального курса математики. 1924 г., шестая глава.

то, что стоили 45 задачников и 45 книг для чтения. Тогда найдем сумму, которую стоили оставшиеся книги для чтения.

1) Сколько стоят 45 книг для чтения и 45 задачников?

```
 1 р. 95 к.
    × 45
 ---------
     975
    780
 ---------
  8775 к. = 87 р. 75 к.
```

2) Сколько осталось книг для чтения?

75 кн. — 45 кн. = 30 кн.

3) Какую сумму стоят эти книги?

```
   126 р. 75 к..
 –  87 „  75 „
 ---------------
    39 р.
```

4) Сколько стоит одна книга для чтения?

39 р. : 30 = 1 р. 30 коп.

Алгебраическое решение. Та же задача при помощи уравнения решалась бы на шестом году просто и естественно.

Предположим, что книги для чтения стоили x руб., тогда все задачники стоят 126,75 – x. Одна книга для чтения стоит $\frac{x}{75}$, а задачник $\frac{126{,}75-x}{45}$.

По условию задачи:

$$\frac{x}{75} + \frac{126{,}75 - x}{45} = 1{,}95$$

Располагая задачи, мы должны руководствоваться пятью признаками, указанными выше, сочетая их между собой. Объективного научно-обоснованнаго мерила для расположения задач по трудности еще нет. Поэтому, подбирая задачи, мы должны руководствоваться пока только своим педагогическим чутьем.

На третьем году доступны для учащихся главным образом арифметические задачи. Алгебраические задачи можно допускать в этом году, как исключение, и то при целесообразной методической проработке. Говоря это, мы имеем в виду подавляющее большинство детей. Отдельные ученики, смышленные, с повышенным интересом к задачам, может быть, охотно и с успехом будут решать и более трудные задачи.

В первом полугодии прочным достоянием мышления учащихся должны стать приведенные задачи в 3—4 действия, при этом такие, которые

вызывают у учащихся ясные образы. Эти задачи можно предлагать им для решения на дому и в качестве контрольных работ. Вот образчик задачи, доступной для самостоятельного решения учащихся на третьем году в первом полугодии, если они получили правильную и достаточную подготовку по арифметике на первом и втором году.

Крестьянская корова дает в год 1200 *л* молока. Из 25 *л* этого молока выходит 1 *кг* масла. В совхозе корова дает в год 3450 *л* молока. 1 *кг* масла выходит из 23 *л* этого молока. На сколько больше получается за год масла от совхозной коровы? (№ 243, Сборн. зад. Поповой, 3 г.).

Приведенные задачи с ясным для учеников событием составляют тот фонд, который становится прочным достоянием мышления учащихся на третьем году. Наряду с этим могут и должны быть предлагаемы детям и другие задачи, которые войдут в мышление учащихся в качестве постоянного и актуального элемента в ближайшем будущем. Таковы — приведенные задачи, события которых еще не вполне отчетливо представляются детям, и некоторые не очень сложные неприведенные задачи.

Решая задачу, трудную по самому сюжету, ученик должен прежде всего ярко представить себе все события, о которых говорится в задаче. Поэтому предварительно путем вопросов надо разобрать содержание задачи, обращая внимание особенно на неясные места ее. Вот образец такой задачи:

Завод израсходовал в месяц 1260 *т* нефти и в 9 раз больше каменного угля. Одна тонна нефти заменяет 7 кубометров дров, а одна тонна угля — 5 кубометров дров. Сколько дров потребовалось бы заводу вместо нефти и каменного угля?

Эта задача относится к виду приведенных. Но то, что в ней требуется выразить с помощью арифметического действия замену нефти и угля дровами, делает ее для самостоятельного решения на третьем году несколько трудной.

А вот пример неприведенной задачи, при этом хорошей задачи.

Из 4 *кг* 337 *г* шерсти связали 9 пар чулок и 10 платков. На каждую пару чулок пошло 183 *г*. Сколько шерсти пошло на каждый платок? (№ 183).

Обе эти задачи, и многие другие в этом же роде, должны войти в круг задач, решаемых совместно с учителем в первом полугодии, в качестве, так сказать, посева, от которого получатся всходы в будущем.

Во втором полугодии следует поставить себе целью — сделать доступной для самостоятельного решения учащихся неприведенную задачу в 3 действия. С этой целью, решая в классе неприведенные задачи, для самостоятельного решения следует предлагать их варианты.

Типовые и алгебраические задачи. На третьем году обучения дети продолжают упражняться в решении некоторых типовых задач, с которыми они впервые встретились на втором году обучения. Таковы задачи, которые решаются по способу приведения к единице, по способу обратного приведения к единице и по способу отношении (см. стр. 233). Здесь также имеют место задачи на вычисление части числа (одной или нескольких). Кроме того в этом классе можно предлагать детям задачи на *пропорциональное деление*. Вот образец такой задачи:

За 3 куска одинакового ситцу заплатили 254 р. 80 к. В одном куске было 28 *м*, в другом 36 *м*, в третьем 34 *м*. Сколько стоил каждый кусок?

Сюда же можно отнести некоторые задачи, не имеющие особого названия, но по своему характеру близкие к типовым. Например:

5 бригад лесорубов спилили 27 936 деревьев. Две ударных бригады сделали столько же, сколько три неударных. Сколько деревьев спилила каждая бригада?

Другой пример:

Легковой и грузовой автомобили проехали одно и то же расстояние и израсходовали вместе 12 *кг* 300 *г* бензина. Легковой автомобиль расходует на 1 *км* пробега 110 *г* бензина, грузовой 300 *г*. Какое расстояние проехали автомобили?

Или, наконец, такая задача:

В двух кусках 72 *м* одинаковой материи. Один кусок стоит 140 р., другой 112 р. Сколько метров в каждом куске?

Типовые задачи, с которыми дети уже встречались на втором году обучения, можно предлагать на третьем году для самостоятельного решения. Что касается новых типов, то, учащиеся решают такие задачи в классе под руководством учителя. Чтобы решить задачу о лесорубах, они должны сделать такое умозаключение: так как ударные и неударные бригады сделали одно и то же, то они поровну спилили деревьев, а поэтому 27 936 надо разделить пополам. При решении задачи об автомобилях дети должны понять, что расстояние, о котором спрашивается в задаче, прошли *оба* автомобиля и *оба* расходовали бензин на каждый километр пути. Поэтому надо узнать, сколько всего бензина расходовали они на каждый километр пути и сколько раз полученное число содержится в 12 *кг* 300 *г*. Такие умозаключения при самостоятельном решении задачи втихомолку могут оказаться непосильными ученику третьего класса.

На третьем году могут найти место, правда, весьма скромное, задачи алгебраического типа:

1. Деление числа на части, разность которых дана.
2. Деление числа на части, отношение которых дано.
3. Задачи на исключение одного из двух неизвестных.

П е р в ы й   т и п. Первые задачи этого типа надо решать на предметах. Предложим ученикам разделить 15 кубиков между двумя товарищами так, чтобы один получил на 3 кубика больше, чем другой. Для этого дадим одному 3 лишних кубика:

$$15 - 3 = 12.$$

Остальные кубики разделим между ними поровну.

$$12 : 2 = 6.$$
$$6 + 3 = 9.$$

Задачу можно выразить в отвлеченной форме: два числа составляют вместе 19, первое больше второго на 5. Найти эти числа.

Будем изображать эти числа кубиками. Сколько единиц было бы в обоих числах, если бы первое число было такое же, как второе? Откладываем 5 кубиков в сторону (19 – 5 = 14). Остаток (14) делим пополам. Узнаем таким образом м е н ь ш е е число.

В предыдущей задаче мы узнавали сначала меньшее число. Можно поставить вопрос иначе: сколько единиц было бы в обоих числах, если бы второе было бы такое же, как первое? Надо к 19 добавить 5 (19 + 5 = 24), а затем разделить полученное число (24) пополам. Узнаем, таким образом, б о л ь ш е е число.

На первом уроке можно ограничиться решением задач с небольшими числами, иллюстрируя его различными наглядными пособиями и требуя от детей подробные объяснения. Через известные промежутки времени к этому типу задач нужно возвращаться, изменяя содержание задач и числа. Не следует допускать, чтобы дети решали задачи этого типа по заученному шаблону, не размышляя. Если задача решается сообща, то учащиеся должны давать подробные объяснения.

Подготовительными к задачам этого типа являются задачи, которые дети решали уже на втором году. Вот образец такой задачи:

В 3 бидонах 87 *л* молока. Когда из одного бидона продали 3 *л*, во всех трех бидонах молока стало поровну. Сколько теперь молока в каждом бидоне?

В т о р о й   т и п. Первые задачи этого типа надо пояснять наглядно. Разделим 16 кубиков между двумя товарищами так. чтобы у одного было в 3 раза больше кубиков, чем у другого.

Дав второму 1 кубик, мы должны дать первому 3 раза по одному кубику, дав второму 2 кубика, мы должны дать первому 3 раза по 2 кубика и т. д.

Дав второму одну часть кубиков, мы должны первому дать три части. Обоим вместе дадим 4 части: 1 + 3 = 4. Найдем, сколько кубиков в одной части, в трех частях и т. д.

Замечания, сделанные к первому типу задач, относятся и ко второму.

Подготовительными к задачам этого типа могут служить следующие задачи:

Для получения бетона берут по весу 1 часть цемента, 2 части песка и 4 части щебня. Сколько надо взять цемента, песка и щебня, чтобы получить 126 *т* бетона?

Третий тип. Трудности третьего типа преодолеваются сравнительно легко.

Один мальчик купил 2 резинки и 3 карандаша и заплатил за все 31 коп. Другой за 2 резинки и 5 карандашей заплатил 45 коп. Сколько стоила резинка и сколько карандаш? Запишем:

2 резинки и 3 карандаша стоят 31 коп.
2 „ 5 „ „ 45 коп.

На сколько копеек больше истратил второй мальчик? Отчего он истратил больше денег?

Эти вопросы наведут учащегося на правильный путь рассуждения.

В качестве подготовительной к решению этой задачи можно взять такую задачу:

Один мальчик купил 3 тетради, а другой 5 тетрадей. Второй мальчик заплатил за свои тетради на 12 коп. больше, чем первый. Сколько копеек истратил на тетради каждый мальчик?

Группировка задач. Арифметические „приведенные“ — задачи, в которых действия следуют за данными числами, можно располагать в группы по числу действий — задачи в 3, 4, 5 и т. д. действий. Эти задачи незамысловатые, „прозрачные“, и поэтому какие-либо дополнительные группировки для них не требуются.

Можно некоторые задачи группировать по их темам, подбирая ри этим задачи приблизительно одинаковой трудности.

Особое значение имеет группировка более трудных задач, т. е. задач неприведенных и алгебраических. Такие задачи выгодно объединять в небольшие группы, которые имеют приблизительно одинаковые формулы решения, или одинаковые последовательности действий. Задача, представляющая группу, типичная для этой группы, решается коллективно, целым классом под руководством учителя. Прочие задачи той же группы могут быть решены учащимися более или менее самостоятельно. Задачи одной и той же группы должны в некоторых отношениях разниться между собой, чтобы учащиеся не решали их механически, по шаблону. С этой целью полезно в выборе однотипных задач руководствоваться степенью их сложности, начиная с более легких задач и затем постепенно их усложняя.

Когда группа в 3—4 задачи решена, то небесполезно через некоторый промежуток времени, например через месяц, предложить учащимся задачу того же типа. Такое периодическое возвращение к одному и тому же типу задач способствует не только лучшему усвоению их решения, но и более глубокому пониманию.

Примеры.

Цели решения примеров могут быть разные, как сказано выше. Здесь мы будем говорить о примерах в несколько действий, которые даются ученикам для укрепления и для развития арифметических понятий и вычислительных навыков.

Примеры могут быть:

а) чисто устные, служащие для беглого счета и решаемые со слов учителя. На третьем году эти примеры заключают по преимуществу числа первой сотни или круглые числа первой тысячи. Например: К 49 прибавить 26, разделить на 3, прибавить 10, уменьшить на 2, вычесть 70. Или еще: К 180 прибавить 120, прибавить 420, разделить на 80, умножить на 60.

б) Полуписьменные примеры, решаемые по книге или по записи на доске. Например: (340 + 36 × 5 – 320) : 8.

Имея пример пред собою, ученик должен пробежать его глазами, для того чтобы выбрать наиболее подходящий прием вычисления.

в) Письменные примеры.

К примерам следует предъявлять требования:

1. Чтобы они заключали разнообразный материал для применения правил о порядке действий. Например:

7084 + 28 798 : 77   39 930 : 55 + 11

(7084 + 28 798) : 77   39 930 : (55 + 11)

Эти правила следующие:

а) Когда в примере встречаются действия сложения и вычитания, то обыкновенно они выполняются в том порядке, в каком записаны.

б) Когда в примере кроме сложения или вычитания встречаются еще умножение и деление, то сперва выполняются эти действия, а затем уже сложение или вычитание.

в) Если в примере имеются скобки, то прежде всего выполняются те действия, которые заключены в скобках.

2. Примеры должны заключать разнообразные случаи каждого арифметического действия.

3. Примеры должны доставлять ученикам возможность выбора разных способов их решения. Такие примеры будут служить не только для вычислительной тренировки, но и для развития внимания, наблюдательности и сообразительности. Так, пример 23 026 : 58 + 34 974 : 58 можно решить длинным способом:

(23 026 : 58 = 397, 34 974 : 58 = 603, 397 + 603 = 1 000).

и коротким

(23 026 + 34 974 = 58 000, 58 000 : 58 = 1 000).

ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ.

Общие указания о преподавании дробей.

Содержание отдела дробей. Простейшие дроби в курсе третьего года представляют собой прямое продолжение дробей предыдущего года: в том и другом году изучаются дроби, составленные из долей $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$, а на третьем году еще и дроби, составленные из долей $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{10}$. Но на втором году сложение и вычитание дробей ограничивается случаем, когда дроби имеют одинаковые знаменатели, а действия эти выполняются без перехода через единицу. На третьем же году изучаются случаи сложения и вычитания дробей с разными знаменателями и с переходом через единицу.

Укажем последовательность в курсе дробей третьего года:

а) Образование долей половина, четверть, восьмая и дробей, составленных из них (повторение); образование долей пятая и десятая и дробей, составленных из них.

б) Образование смешанного числа.

в) Преобразование смешанного или целого числа в дробь и обратно.

г) Преобразование одних долей в другие.

д) Сложение и вычитание дробей с равными знаменателями (отчасти повторение).

е) Сложение и вычитание дробей с различными знаменателями.

ж) Сложение и вычитание смешанных чисел.

з) Вычисление данной части числа.

Наглядность в курсе дробей. Понятия детей о дробях на третьем году имеют образный характер: ученик представляет дробь не как цифровой символ, а как часть предмета — круга, полосы и т. д. Поэтому выбор наглядных пособий и правильное пользование ими имеет большое значение для этого курса дробей. Существовали и существуют в продаже готовые классные наглядные пособия к курсу дробей, однако учитель и сам по своему вкусу может изготовить таковые из цветной плотной бумаги или папки. Единица может быть представлена в виде бумажной полосы или в виде круга. Следует иметь пособия обоего рода.

Пособия прикрепляются кнопками к доске, сделанной из мягкого дерева; доска эта подвешивается к классной доске или к классным счетам. Можно пособия ставить на особую подставку, которая подвешивается на крюках к раме классных счет.

Кроме классных пособий, рассчитанных на занятия с целым классом, у учителя должны быть наборы кружков, полосок и их долей, в качестве дидактического материала для каждого ученика.

Метод обучения действиям над дробями. Понятия детей о дробях имеют образный характер, поэтому рассуждения, которыми сопровождается действие с дробями, становятся понятными детям только тогда, когда они наглядны. Допустим, например, что требуется 3 четверти раздробить в восьмушки. Возьмем два равных круга — один: разрезанный на 4 равные части, а другой — на 8 равных частей. Свои рассуждения будем относить к этим кругам.

Из 4 четвертей круга можно получить 8 восьмых
Из 1 четверти „ „ „ 2 „
Из 3 четвертей „ „ „ 6 „

Ученик покрывает четверть и 3 четверти круга восьмыми его долями. Единицу и ее доли можно также изобразить полоской бумаги.

Вывод: 3 четверти равны 6 восьмым. Запись: $=\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$.

Этот ход рассуждений понятен детям потому, что он нагляден. После нескольких наглядных рассуждений их схема и образ, с которыми они связаны, запоминаются, и ученик приобретает возможность производить вычисления, не пользуясь пособиями. У детей 3 года обучения образы более устойчивы, чем у детей 2 года. Поэтому в то время, как на втором году все операции с дробями надо выполнять наглядно, на 3 году наглядные пособия нужны до тех пор, пока образ и ход рассуждений не будут усвоены, после чего пособия могут быть устранены. Однако производя действия над дробями, ученик третьего года всегда руководится рассуждениями, а не заученными правилами: в отделе дробей на третьем году никакие правила-детям не сообщаются.

Действия над простейшими дробями.

Образование дроби. Будем различать образование: а) доли единицы, б) дроби и в) смешанного числа. Ученик должен отчетливо понимать требование — найти $\frac{1}{4}$ листа бумаги, оторвать $\frac{3}{8}$ полосы, взять $2\frac{3}{4}$ круга — и уметь это требование выполнить.

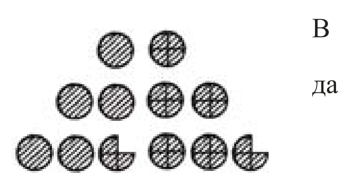
Для детей должна быть ясна связь между цифровым и наглядным образом дроби. Напишем на доске $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\frac{3}{4}$. Ученики читают эти дроби и затем зарисовывают в тетрадях $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ и $1\frac{3}{4}$ полосы или квадрата. Не именуя членов дроби числителем и знаменателем, ученики должны знать

Черт. 92.

значение того и другого в записи дроби: в записи $\frac{3}{8}$, число 8, стоящее под чертой, обозначает *восьмые* части, а число 3, стоящее над чертой, три части. Термины — целое число и дробь на третьем году ученики должны понимать; вырабатывать же определение понятия дроби — преждевременно.

Преобразование смешанного или целого числа в дробь. Ученик сумеет сделать преобразование смешанного числа в дробь, если он будет отчетливо представлять себе, как образовалось это число.

Чтобы узнать, сколько четвертей в числе $2\frac{3}{4}$, представим число $2\frac{3}{4}$ в виде $2\frac{3}{4}$ круга и узнаем, сколько четвертей заключают $\frac{3}{4}$ круга: возьмем один круг, еще один круг и $\frac{3}{4}$ третьего круга.



Черт. 93.

В первом круге $\frac{4}{4}$, во втором также $\frac{4}{4}$, в двух кругах $\frac{8}{4}$, да $\frac{3}{4}$, всего $\frac{11}{4}$. Итак $2\frac{3}{4}$ круга заключают $\frac{11}{4}$ круга.

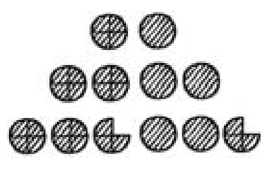
Запись: $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$.

Последовательность в преобразованиях:

а) Преобразование целого числа ($1=\frac{2}{2}$; $2=\frac{4}{2}$; $1=\frac{4}{4}$; $3=\frac{12}{4}$; $1=\frac{8}{8}$; $2=\frac{16}{8}$; $1=\frac{5}{5}$; $3=\frac{15}{5}$; $1=\frac{10}{10}$; $3=\frac{30}{10}$).

б) Преобразование смешанного числа ($1\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{4}$; $2\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{8}$; $1\frac{3}{8}$; $1\frac{5}{8}$; $1\frac{7}{8}$; $2\frac{1}{8}$; $2\frac{3}{8}$; $2\frac{5}{8}$; $2\frac{7}{8}$; $1\frac{1}{5}$; $2\frac{7}{10}$).

Преобразование неправильной дроби. Обращение неправильной дроби в смешанное число основывается на образовании этой дроби. Чтобы обратить $\frac{11}{4}$ в целое число с дробью, ученик должен представить себе, как образовалась дробь $\frac{11}{4}$ из единицы.



Черт. 94

Узнаем, сколько единиц в дроби $\frac{11}{4}$. Сперва наберем $\frac{11}{4}$ круга и узнаем сколько из $\frac{11}{4}$ круга можно составить полных кругов. Возьмем один круг или $\frac{4}{4}$, еще один круг или $\frac{4}{4}$, мы взяли $\frac{8}{4}$ круга. Еще возьмем $\frac{3}{4}$ круга — всего $\frac{11}{4}$ круга. Итого, чтобы набрать $\frac{11}{4}$ круга, мы взяли 1 круг, еще 1 круг и $\frac{3}{4}$ третьего круга. Итак $\frac{11}{4}$ круга — то же что $2\frac{3}{4}$ круга. Запись: $\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$.

Последовательность в прохождении преобразования долей, сложения и вычитания дробей. Упражнения в преобразовании, сложении и вычитании дробей можно располагать в различной последовательности. Так как наиболее трудную часть их составляет раздробление и превращение долей, то выгоднее всего упражнения располагать по долям. Примем такую последовательность:

1. $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}, \frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Сложение и вычитание дробей, составленных из половин и четвертей.

2. $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}, \frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. Сложение и вычитание дробей, составленных из половин и восьмых.

3. $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}, \frac{3}{4}=\frac{6}{8}, \frac{2}{8}=\frac{1}{4}, \frac{6}{8}=\frac{3}{4}$. Сложение и вычитание дробей, составленных из четвертей и восьмых.

4. $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}, \frac{2}{5}=\frac{4}{10}$ и т. д. $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}, \frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ и т. д. Сложение и вычитание дробей, составленных из пятых и десятых.

Преобразование долей. Преобразование долей заключает в себе две операции: 1) раздробление долей в более мелкие доли; 2) превращение долей в более крупные доли.

1. Раздробление долей в более мелкие доли, т. е. половин и четвертей в восьмые доли, пятых в десятые доли можно наблюдать на опыте, обозначив единицу при помощи полосы и разделив полосы на 2, 4 и 8 или на 5 и на 10 равных частей. Глядя на эти полосы, непосредственно убеждаемся, что из половины получаются 2 четверти и 4 восьмых; из одной четверти — две восьмых и т. д. Обратно, из 2 восьмых составляется 1 четверть и т. д.

Однако, одного созерцания недостаточно. Чтобы дети не были привязаны к пособию и не оставались беспомощными, когда перед ними пособия нет, надо научить их рассуждать.

Раздробим $\frac{1}{4}$ в восьмые:

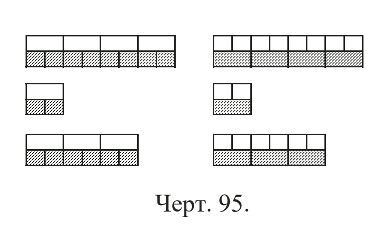
Из 4 четвертей получается 8 восьмых
Из 1 четверти „ 2 восьмых
Поэтому 1 четверть = 2 восьмым.

Обратно:

Из 8 восьмых составляются 4 четверти
Из 2 восьмых „ 1 четверть.

Эти же заключения сделаем, наблюдая соотношение между четвертями и восьмыми круга.

Записи: $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$; $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$



Черт. 95.

2. Подобно предыдущему можно из $\frac{3}{4}$ полосы получить $\frac{6}{8}$ и наоборот из $\frac{6}{8}$ полосы составить $\frac{3}{4}$. Из $\frac{3}{4}$ круга получить $\frac{6}{8}$ его и из $\frac{6}{8}$ составить $\frac{3}{4}$ его. Затем сделать заключение, что $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ и $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Сложение и вычитание дробей. Последовательность, в какой целесообразно пройти эти действия, указаны выше (стр. 325). Покажем, как составляются группы упражнений, относящихся к сложению и вычитанию. Для примера будем брать дроби, составленные из половин и четвертей.

а) Сложение и вычитание дробей с одинаковыми долями без перехода через единицу: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$; $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$; $1\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$; $1\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$; $1 - \frac{1}{4}$; $1 - \frac{3}{4}$.

б) Сложение и вычитание дробей с разными долями без перехода через единицу: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; $1 - \frac{1}{4}$; $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; $1\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$; $2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2}$.

в) Сложение и вычитание дробей с одинаковыми долями с переходом через единицу: $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$; $1\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$; $1\frac{1}{4} - \frac{3}{4}$

г) Сложение и вычитание дробей с разными долями и с переходом через единицу: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4} + 1\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$.

По этой же схеме можно было бы составить группы упражнений к долям $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{10}$. Часть из приводимых здесь упражнений была уже проделана на втором году и здесь должна быть повторена. Остановим наше внимание на новых случаях сложения. Сложим доли $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$. Взяв половину круга и четверть круга, предлагаем детям сложить их. Дети впервые встречаются с этим требованием и смысла его не понимают. Обычно отвечают: получится половина с четвертью. Поставим вопрос полнее: надо сложить половину круга и четверть круга, сколько получится четвертей круга? Вопрос решается наглядно.

Приведем другой пример сложения: $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$. Детям ставится требование в такой форме: возьмите круга и у круга; прибавьте к $\frac{3}{4}$ круга половину круга, сколько получится? Может потребоваться дополнительное разъяснение: *сколько получится четвертей круга?* Расчленим сложение этих дробей на отдельные шаги:

Первый шаг. Раздробим $\frac{1}{2}$ в четверти. Дети заменяют половину круга двумя четвертями.

Второй шаг. Сложим $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{2}$. Результат получают непосредственным сосчитыванием четвертей круга.

Третий шаг. Из $\frac{5}{4}$ выделим 1 единицу. Дети из 5 четвертей круга составляют целый круг и 1 четверть.

Этот же случай, как довольно сложный, следует проработать на других пособиях, например, прибавить к 3 четвертям квадрата половину квадрата.

Проделав сложение дробей $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{2}$ в наглядной форме, следует сделать обобщение способа и результата сложения в отвлеченной форме. Запись должна отразить все три шага сложения

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}.$$

Наряду с наглядными упражнениями и отвлеченными примерами необходимо предлагать детям задачи: ученик исписал $\frac{3}{4}$ листа бумаги и $\frac{1}{2}$ листа; сколько бумаги исписал он?

Подробно разработанный здесь случай сложения может служить методическим образчиком и для других случаев сложения и вычитания.

Возникает еще вопрос: необходимо ли предлагать детям повторительные вопросы на сложение и вычитание дробей в отвлеченной форме? Ответ на этот вопрос должен быть утвердительный. Допустим, что группы упражнений, приведенные на стр. 325, проработаны наглядно; они могут служить материалом для упражнений в отвлеченном виде, например, в форме беглого счета. Соответствующие случаи сложения могут встретиться и в задачах.

Вычисление заданной части числа. Вычисление части числа основывается на представлении об образовании дроби, как части единицы. Чтобы понять настоящий смысл вопроса — найти $\frac{3}{4}$ числа 52 и после-

довательность его решения, надо знать, как найти $\frac{3}{4}$ круга, линии, единицы. Поэтому, предлагая учащимся этот пример, необходимо предварительно предложить им конкретный вопрос: найти $\frac{3}{4}$ линии или круга. И это следует делать перед каждым примером, пока они не усвоят вполне смысла вопросов, относящихся к нахождению части числа, и способа их решения.

Упражнения могут быть расположены в такие группы:

1. Нахождение одной доли числа (найти четверть числа 64, взять половину числа 96).

2. Нахождение нескольких долей числа (найти $\frac{3}{4}$ числа 52).

1. Найти 1 четверть линии, полосы. Как это делается? Узнать 1 четверть числа 92. Сколько получилось? Как вычислили? Записать. После ряда упражнений следует сделать вывод в конкретной форме: чтобы найти 1 четверть 92, надо 92 разделить на 4; чтобы найти половину числа 72, надо 72 разделить на 2 и т. п.

2. Переходим к нахождению 3 четвертей числа.

Найти 3 четверти круга, линии. Как это делается?

Узнаем, сколько сантиметров имеют 3 четверти метра. Задачу решаем наглядно, имея перед собой метр.

Узнаем, сколько сантиметров имеет 1 четверть метра. Надо 100 *см* разделить на 4 равные части, получим 25 *см*. Запись: 100 *см* : 4 = 25 *см*. Указывают четверть метра.

Узнаем, сколько сантиметров имеют 3 четверти метра. В одной четверти метра 25 *см*. Поэтому 25 *см* надо умножить на 3, получится 75 *см*.

Запись: 25 *см* × 3 = 75 *см*.

Вся запись может иметь такой вид:

В 1 *м* — 100 *см*

„ $\frac{1}{4}$ *м* „ 100 *см* : 4 = 25 *см*

„ $\frac{3}{4}$ *м* „ 25 *см* × 3 = 75 *см*.

В затруднительных случаях можно прибегать к другим наглядным пособиям. Найдем 3 восьмых числа 24. Представим число 24 в виде 24 кубиков, расположенных рядом. Нахождение 3 восьмых этого ряда представит собой привычную для детей операцию нахождения 3 восьмых предмета.

После нескольких упражнений в нахождении части числа следует сделать вывод в конкретной форме: чтобы найти $\frac{3}{4}$ числа 100, надо 100 разделить на 4, полученное же число умножить на 3.

Примеры в нахождении части числа должны чередоваться с задачами и с беглым счетом.

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ НА ТРЕТЬЕМ ГОДУ.

Содержание курса геометрии на третьем году. Круг сведений из геометрии, которые даются детям на третьем году, весьма ограничен. Тем более внимательно надо к ним отнестись, чтобы элементы геометрии оказали возможно большее образовательное действие на чувства и мышление детей и лучше были ими усвоены.

Основной геометрической фигурой, вокруг которой группируются и развертываются геометрические понятия на третьем году, является *прямоугольник*. Эта фигура — *плоская*, составлена *прямыми линиями*, из которых одни *пересекаются*, образуя *угол*, другие тянутся рядом, не сходясь и не расходясь. Прямоугольник может иметь различный вид — от узкой и длинной полоски до *квадрата* — и разную *величину*. Его можно разрезать на части и из этих частей составить другие фигуры. Он может быть *измерен*: измерив его стороны, можно найти *их сумму* (периметр) или вычислить его *площадь*.

Все эти понятия должны быть преподаны последовательно и связно, лабораторно — при деятельном участии в работе детей с выходом из класса на воздух для измерений. В самом начале учебного года, пока погода еще позволяет сделать выход на открытое место, надо преподать детям первые сведения о плоскости и прямой, об углах, в особенности — о прямых углах, научить их строить на неграфленой бумаге прямоугольник и квадрат заданных размеров и после всего этого построить на местности квадраты со стороной в 10 *м* (ар), а если местность позволяет, то и в 100 *м* (гектар).

На второй и на третьей четверти необходимо вернуться к прямоугольнику для того, чтобы те понятия, о которых шла речь выше, повторить, уточнить, сделать более или менее привычными. Основываясь на них, можно уже приступить к измерению периметра прямоугольника (не вводя этого слова) и его площади.

При измерении площадей появятся именованные числа, содержащие квадратные меры. Чтобы ученики освоились с ними, надо дать им ряд примеров на преобразование этих именованных чисел.

К концу года предстоит снова выход на местность. В предвидении этого необходимо познакомить детей с планом, т. е. со съемкой плана и измерениями по плану.

Весной следует вывести детей на открытое место, чтобы снять план участка земли, имеющего форму прямоугольника, и сделать измерение периметра и площади какой-либо прямоугольной фигуры небольших размеров. Таким образом занятия геометрией на третьем году могут протекать в такой последовательности:

1) Плоскость и прямая линия; 2) прямой, острый и тупой угол; 3) прямоугольник и квадрат, их построение; 4) построение прямой линии на местности; 5) построение квадрата на местности; 6) сумма сторон прямоугольника; 7) площадь прямоугольника; 8) единицы измерения площади; 9) площадь квадрата; 10) таблица квадратных мер; 11) задачи на измерение и вычисление площадей; 12) раздробление и превращение именованных чисел с квадратными мерами; 13) план и масштаб; 14) измерение площади по плану; 15) план участка земли; 16) измерение площади участка земли.

Плоскость и прямая линия. Знакомство с плоскостью начинается с рассмотрения поверхностей предметов — граней куба, поверхности доски, стены, печки, листа бумаги, воды в сосуде и т. п. Дети должны заметить разницу между ними: у одних предметов поверхность ровная, прямая, без закруглений, у других — кривая. Поверхность одних тел называется плоской или плоскостью, у других — кривой. Так путем противопоставления этих двух образов у детей выработается верное и точное понятие о плоскости.

Представление о прямой линии у детей уже существует. На третьем году надо к нему вернуться, чтобы его сделать более ясным и точным. Начнем с графического образа прямой линии. Черта, проведенная вдоль ребра линейки, есть прямая линия; окружность — кривая линия. Переходим к другим образам прямой и кривой линии. Натянутая нить изображает прямую линию; ослабленная нить уже будет изображать кривую линию.

Говорить о неограниченности прямой или плоскости, об отсутствии у нее толщины нет необходимости, да учащиеся на третьем году и не могут понять этого. Гораздо важнее добиться того, чтобы они умели при помощи линейки и хорошо очинённого карандаша правильно чертить тонкие прямые линии, знали, как продолжить прямую линию. Поэтому следует предлагать ученикам чертить в тетради при помощи линейки и хорошо очинённого карандаша прямые линии заданной длины — в 3 *см*; 5 *см*; 2 *см* 7 *мм* и т. д., непременно в разных положениях: ученики должны наблюдать прямую линию в разных ее положениях, чтобы у них не создалась привычка относить понятие прямой линии только к одному ее положению.

Известно, что, если прямая линия имеет с плоскостью две общие точки, все другие точки ее лежат на плоскости. Это свойство прямой, и плоскости может быть выражено и показано в конкретной форме. Если линейка верна, т. е. ребро линейки представляет прямую линию, то ее можно приложить к плоской поверхности так, что между ее ребром и плоскостью не будет просвета. Основываясь на этом свойстве прямой, дети проверяют поверхности предметов — стола, доски, стены и др.

Прямой, острый и тупой углы. Определение прямого угла для детей третьего года недоступно. Поэтому можно удовольствоваться тем, что они будут отличать прямые углы от непрямых —острых и тупых углов и уметь

чертить их при помощи чертежного треугольника или куска бумаги, сложенного вчетверо.

Чтобы выработать у детей понятие угла, надо показать им разные образцы его: угол, составленный двумя прутиками или двумя полосками бумаги, прикрепленными к доске; угол, начерченный на доске или на бумаге, углы у предметов. Точка, из которой выходят две прямые линии, называются *вершиной угла*; сами же прямые линии, выходящие из одной точки, называются *сторонами угла*.

Сдвигая стороны угла, мы уменьшаем угол. Раздвигая стороны, угол увеличиваем. Когда одна сторона угла стоит на другой „прямо“, то такой угол мы называем *прямым*. Чтобы получить прямой угол, достаточно кусок бумаги сложить вчетверо. Если этот кусок бумаги развернуть, то около одной вершины будут расположены на плоскости четыре прямых угла. Составим из прутиков прямой угол. Сблизив стороны его, мы получим *острый угол*: острый угол меньше прямого. Составим снова из прутиков прямой угол. Раздвинув его стороны, получим *тупой угол*: тупой угол больше прямого.

Ученики вычерчивают на бумаге с помощью чертежного треугольника или куска бумаги, сложенного вчетверо, несколько прямых углов в разных положениях. Затем строят несколько острых и тупых углов разной величины.

Полезно начертить несколько пар прямых линий, пересекающихся под прямым углом: каждая такая пара прямых образует четыре прямых угла. У детей возникает представление о перпендикулярных прямых, без самого слова перпендикуляр.

Две прямые, расположенные на плоскости — на доске, на бумаге, могут пересекаться: тогда они образуют углы. Показать их. Сколько их? Какие они?

Весьма часто прямые на плоскости идут рядом, не сближаясь и не расходясь, всюду на одном и том же расстоянии друг от друга. Таких прямых мы наблюдаем много на предметах, окружающих нас. Поэтому надо научиться чертить их: дети проводят на бумаге две прямые, которые находятся друг от друга всюду на расстоянии, например, 3 *см*.

Квадрат и прямоугольник. Ученики уже имеют некоторое знакомство с этими фигурами. На третьем году надо дать *описание признаков* квадрата и прямоугольника и научить детей правильно чертить эти фигуры на неграфленой бумаге. Выставим перед учениками несколько изображений квадрата: грань куба, бумажный квадрат, чертеж квадрата. Ученики показывают стороны квадрата, углы и вершины его. У квадрата — четыре стороны, все они равны. Эти стороны образуют четыре прямых угла.

Приступим к черчению квадрата. Построим квадрат, стороны которого равны 4 *см*. Для этого проведем прямую и на ней отмерим отрезок *АБ*, длиной

в 4 *см*. У концов отрезка с помощью чертежного треугольника построим два прямых угла.

Стороны этих углов *АГ* и *БВ* должны находиться всюду на расстоянии 4 *см*. Проверим их: для этого надо измерить расстояние между ними у их концов: оно должно быть равно 4 *см*. Отмерим (отложим) линии *АГ* и *БВ*, равные 4 *см*. Соединим прямой линией точки *Г* и *В*.

По заданию учителя ученики вычерчивают квадраты, стороны которых равны 1 *см* и 1 *дм*.

Покажем ученикам несколько прямоугольников — грань прямоугольного параллелепипеда, лист бумаги, начерченный на бумаге прямоугольник. Все эти фигуры называются прямоугольниками. У каждого прямоугольника 4 стороны, которые образуют четыре прямых угла. Две стороны прямоугольника равны, две другие также равны.

Прямоугольники заданных размеров ученики вычерчивают на доске, а затем в тетради.

Сравните прямоугольник и квадрат.

Сходство:	*Различие:*
У квадрата и у прямоугольника по четыре стороны, по четыре угла, углы прямые, противоположные стороны равны.	У квадрата все четыре стороны равны. У прямоугольника две противоположные стороны равны и другие две тоже равны.

Организация работ на местности. Желательно, чтобы работы детей на местности выполнялись бригадами человек в 6 каждая. Главой бригады назначается расторопный, энергичный ученик или ученица. Каждый из учащихся получает свое задание: одни измеряют, другие записывают, третьи перемеряют, проверяют.

Работа сперва выполняется под руководством учителя перед всем классом отдельными учениками по его указанию. Затем уже работу производят отдельные бригады в разных местах.

Построение квадрата на местности. Дети научились строить квадрат на бумаге. Совершенно последовательно будет перейти к построению его на местности.

Как мы уже сказали выше, построение выполняется осенью.

Построим квадрат, стороны которого равны каждая 10 *м*. Стороны его отмерим мерной веревкой. Прямые углы будем строить наглаз. Вершины отметим вехами.

Цель работы — дать учащимся приблизительное представление об аре.

Весьма желательно построить на местности квадрат, стороны которого равны́ каждая, примерно, 100 *м*, т. е. квадрат в 1 *га*, если, конечно, имеются для этого благоприятные природные условия. Так как цель этой работы — сообщить учащимся лишь приблизительное представление о величине гектара, то стороны квадрата можно отмерить шагами.

Приняв за метр 2 детских шага, можно построить квадрат, каждая сторона которого содержит 200 детских шагов.

Измерения прямоугольника.

Измерение сторон прямоугольника. Приступим к измерению прямоугольника и квадрата. Измерение сторон этих фигур приводит к вычислению их периметров и площадей.

Выставив прямоугольник, вырезанный из папки, предложим задачу: измерить длину всех вместе сторон прямоугольника. Если прямоугольник сделан правильно, то надо ли измерять все четыре его стороны? Какие стороны надо измерить? Один из учеников измеряет их, другой для контроля перемеряет: стороны .равны — одна 55 *см*, другая 35 *см*. Вычислим длину всех вместе сторон прямоугольника:

$$55\ \text{см} + 35\ \text{см} + 55\ \text{см} + 35\ \text{см} = 180\ \text{см} = 1\ \text{м}\ 80\ \text{см}.$$

Можно вычисление сделать иначе:

$$55\ \text{см} \times 2 = 110\ \text{см};\ 36\ \text{см} \times 2 = 70\ \text{см}$$
$$110\ \text{см} + 70\ \text{см} = 180\ \text{см} = 1\ \text{м}\ 80\ \text{см}$$

Мы вычислили длину всех вместе сторон прямоугольника, иначе говоря: мы вычислили *сумму всех сторон* прямоугольника.

Раздав каждому из учеников заранее приготовленные прямоугольники, предложим найти сумму всех сторон прямоугольника. Каждый ученик измеряет стороны своего прямоугольника и вычисляет сумму всех сторон.

Прямоугольники следует перенумеровать, а стороны их предварительно измерить, для того чтобы иметь возможность проверить ответы учеников.

От измерения периметров бумажных прямоугольников надо перейти к измерению периметра пола класса или другого помещения, а затем к решению задач на вычисление периметров.

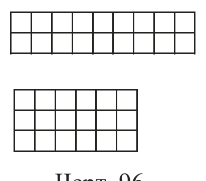
Понятие площади. В математике площадь имеет двоякий смысл: площадь понимают и как величину поверхности фигуры, и как число, которым эта величина выражается. В начальном курсе арифметики мы будем понимать площадь главным образом, как число.

Выясним сперва понятие о площади, как о величине. Для этого сделаем из бумаги два прямоугольника разного цвета и разной величины. Наложив

один на другой, заключаем, что один меньше другого: *площадь* одного *меньше площади* другого.

Сравним так же два равных прямоугольника: площади их равны.

Сделаем еще два прямоугольника, размеры которых 9 *дм* и 2 *дм*, 6 *дм* и 3 *дм*. Разграфим их на квадраты, стороны которых равны каждая 1 *дм*. Сравним их площади: их площади равны, потому что каждый прямоугольник заключает по 18 одинаковых квадратов.



Черт. 96.

Площадь квадрата, сторона которого равна 1 *дм*, называется квадратным дециметром. В прямоугольнике заключается 18 квадратных дециметров; поэтому говорят, что *площадь прямоугольника равна 18 кв. дециметрам.*

Таким образом ученики воспринимают понятие площади, как величины и как числа. Переходим к единицам измерения площади.

Единицы измерения площади (меры площади). Для измерения площади служат особые меры — единицы площади, меры площади или квадратные меры. Одну из них учащиеся уже наблюдали: это — квадратный дециметр.

Квадратным дециметром называется площадь квадрата, у которого сторона равна дециметру.

У учеников в тетрадях начерчены квадраты, стороны которых равны 1 *см* (стр. 332). Площадь такого квадрата называется квадратным сантиметром.

На доске вычерчивают квадрат, площадь которого равна квадратному метру.

Надо, чтобы ученики ясно понимали различие между квадратными и линейными мерами. Начертим квадрат, стороны которого равны 1 *см* и рядом отрезок, длина которого равна 1 *см*. Площадь квадрата — один квадратный сантиметр, длина отрезка — один сантиметр.

Измерение площади прямоугольника. Измерим площадь прямоугольника, длина которого 8 *см*, а ширина 3 *см*. Учащиеся вычерчивают прямоугольник, делят его на квадраты, стороны которых равны каждая 1 *см*. На прямоугольнике помещается 24 кв. *см*. Иначе говорят: площадь прямоугольника равна 24 кв. *см*.

Начертив другой прямоугольник, стороны которого равны 6 *см* и 4 *см*, ученики и этот прямоугольник делят на квадратные сантиметры и затем их подсчитывают: площадь прямоугольника равна также 24 кв. *м*. Площади обоих прямоугольников равны.

Подсчет клеточек, которые помещаются на прямоугольнике, совершается планомерно. Так как длина прямоугольника 6 *см*, то по длине можно уложить 6 квадратов, величиной каждый в 1 кв. *см*.

Из этих квадратов составится полоса, длиной в 6 *см* и шириной в 1 *см*. Площадь ее 6 кв. *см*. Так как ширина прямоугольника 4 *см*, то таких полос в нем будет 4. Чтобы узнать его площадь, надо 6 кв. *см* умножить на 4.

6 кв. *см* × 4 = 24 кв. *см*.

Число квадратных сантиметров в прямоугольнике можно сосчитать и иначе. В поперечной полосе 4 кв. *см*. Полос 6. Поэтому:

4 кв. *см* × 6 = 24 кв. *см*.

В предыдущей задаче учащиеся, измеряя площадь прямоугольника, делили его *фактически* на квадратные сантиметры. Таких упражнений они должны проделать несколько. Эти упражнения составляют *первый этап* в процессе изучения площади прямоугольника. *Второй этап* в изучении площади прямоугольника составляют такие упражнения, в которых учащиеся измеряют основание и высоту данного им прямоугольника, но делят его на квадратные клетки мысленно, в воображении, и затем подсчитывают их. Этот этап должен быть длительным: все задачи на измерение и на вычисление площади решаются не по правилу, а с помощью рассуждений, опирающихся на образ прямоугольника, разделенного на квадратные единицы.

Квадратными единицами могут служить квадратный сантиметр, кв. дециметр и кв. метр. Каждую из единиц учащиеся должны ясно себе представлять. С этой целью квадратные меры должны быть изготовлены и вывешены на стенке класса.

Третий и последний *этап* в изучении площади прямоугольника составляет вычисление площади по правилу. К нему следует перейти только после того, как схема рассуждений, которой дети пользуются при вычислении площади, сделается совершенно привычной. Правило может быть выражено так: измеряем длину и ширину прямоугольника (одной и той же мерой) и полученные числа перемножаем.

Площадь квадрата. Квадрат есть прямоугольник, стороны которого равны. Поэтому, умея измерять и вычислять площадь прямоугольника, легко измерить или вычислить площадь квадрата.

Предложим учащимся задачу: вычислить площадь квадрата, сторона которого равна 6 *см*. Они должны решить ее без затруднения: 6 кв. *см* × 6 = = 36 кв. *см*.

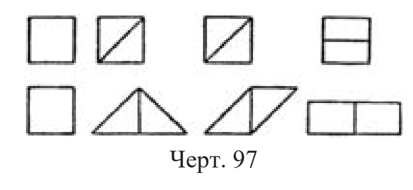
Если бы кто-нибудь из них задачи этой не решил, то это показывало бы, что площадь прямоугольника им усвоена еще недостаточно.

Таблица мер длины и площади. Единицы площади — кв. метр, кв. дециметр, кв. сантиметр и единичные их отношения ученики должны представлять себе конкретно. Для этого квадрат, сторона которого равна

метру, делится на квадратные дециметры и квадрат, стороны которого имеют по 1 *дм*, делится на кв. сантиметры. Полезно сопоставить единичные отношения линейных и квадратных мер:

1 *м* = 10 *дм*	1 кв. *м* = 10 · 10 = 100 кв. *дм*
1 *дм* = 10 *см*	1 кв. *дм* = 10 · 10 = 100 кв. *см*
1 *м* = 100 *см*	1 кв. *м* = 100 · 100 = 10000 кв. *см*

Изображая часто площади квадратного сантиметра, кв. дециметра и кв. метра в виде квадратов соответствующих размеров, учащиеся настолько привыкают к этим образам, что уже всегда представляют себе единицы площади в виде квадратов. Надо добиться того, чтобы они могли отличить площадь, как величину, от формы фигуры. Вырежем из бумаги четыре квадрата, стороны которых равны 1 *дм*; разрежем два квадрата по диагонали, а третий вдоль средней линии, т. е. вдоль прямой, соединяющей середины противоположных сторон. Из частей квадратов составим три фигуры (черт. 97). Четвертая фигура — квадрат. Площадь каждой из полученных четырех фигур равна одному квадратному дециметру, но формы всех этих фигур различны.



Черт. 97

Кроме названных здесь мер площади, существуют меры, служащие для измерения поверхности земли — ар и гектар.

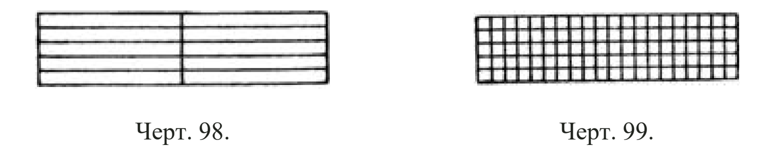
Осенью ученики наблюдали на поверхности земли квадрат со стороной в 10 *м*, а при благоприятных условиях и квадрат со стороной в 100 *м*. Поэтому они имеют образное представление о мерах ар и гектар.

Задачи на измерение и вычисление площадей прямоугольника и квадрата. Пока дети изучают измерение площади прямоугольника в генетической последовательности, они решают задачи на площадь. После того как правило вычисления площади выведено, надо решить новый ряд задач с разнообразным содержанием. Все упражнения в вычислении площади можно разбить на такие группы: вычисление площади прямоугольника и квадрата, когда стороны их выражены: а) простыми именованными числами и одинаковыми мерами; в) простыми именованными числами и разными мерами; с) составными именованными числами.

Важно обратить внимание на переход от первой группы упражнений ко второй, т. е. к вычислению площади прямоугольника, у которого стороны выражены простыми именованными числами с разными мерами: например, числами 2 *дм* и 5 *см*.

Вырезав из бумаги прямоугольник, у которого стороны равны 2 *дм* и 5 *см*, мы можем предложить ученикам вопрос: какими мерами может быть измерна

его площадь? Ответ на этот вопрос двоякий: либо пришлось бы изобретать новые меры (черт. 98), что неудобно, либо воспользоваться старыми квадратными мерами, но тогда надо 2 *дм* раздробить в сантиметры (черт. 99).



Черт. 98. Черт. 99.

Когда стороны прямоугольника выражены простыми именованными числами с разными мерами, то при вычислении его площади надо одно из этих чисел раздробить, чтобы меры у них были одинаковы.

При переходе к упражнениям третьей группы, т.е. к вычислению площади прямоугольника, у которого стороны выражены составными именованными числами, ученикам будет вполне ясна необходимость раздробления чисел в одинаковые меры.

Одного вычисления площади по готовым числовым данным недостаточно: необходимы измерения сторон прямоугольника самими учениками с последующими вычислениями его площади.

Для этого надо иметь набор прямоугольников, квадратов и многоугольников с прямыми углами, вырезанных из плотной бумаги. Эти фигуры раздаются ученикам, которые измеряют их стороны и затем вычисляют площади. Фигуры эти можно нарезать по 10-20 штук, размерами в 12 *см* и 5 *см*; 6 *см* и 10 *см*; 6 *см* и 6 *см*; 12 *см* и 12 *см*; 1 *см* и 12 *см*; 2 *см* и 15 *см*. Во время измерения надо предупредить учеников, чтобы они длину и ширину прямоугольника брали в круглых сантиметрах.

Полезно произвести измерения помещений – площади класса, площади сарая и др.

Пусть, например, измерены длина и ширина класса: длина 8 *м* 5 *дм*, а ширина 6 *м* 4 *дм*. Рассчитаем, достаточно ли площади этого класса на 36 учеников, если на ученика полагается площадь 1 кв. *м* 50 кв. *см*.

8 *м* 5 *дм* = 85 *дм*
6 *м* 4 *дм* = 64 *дм*

$$\begin{array}{r} 85 \text{ кв. дм} \\ \times\ 64 \\ \hline 340 \\ 510 \\ \hline 5440 \text{ кв. дм} \end{array} = 54 \text{ кв. м } 40 \text{ кв. дм}$$

На ученика полагается 1 кв. *м* 50 кв. *дм* пола. В классе учеников 36. Сколько квадратных метров пола требуется на 36 учеников?

1 кв. *м* 50 кв. *дм* = 150 кв. *дм*.

150 кв. *дм*
36
———
900
4 50
———
5 400 кв. *дм* = 54 кв. *м*

Раздробление и превращение именованных чисел с квадратными мерами. Преобразование именованных чисел, содержащих квадратные меры, делается так же, как и других метрических именованных чисел. Тем не менее ученики чаще всего ошибаются при раздроблении и превращении квадратных мер. Например, раздробляя 2 кв. *дм* в кв. сантиметры, получают 20 кв. *см* и даже 20 *см*. Происходит это по вине преподавателей, которые мало заботятся о выработке у детей устойчивых образных представлений о квадратных мерах и об их соотношениях.

Чтобы избежать таких ошибок, следует первые упражнения на раздробление и превращения делать с небольшими числами, поясняя их чертежами. Раздробим для примера 2 кв. *дм*. Выставим перед глазами учащихся прямоугольник, длиной в 2 *дм* и шириною в 1 *дм* и квадратный дециметр, разделенный на квадратные сантиметры. Сколько квадратных дециметров заключается в этом прямоугольнике? В какие меры можно раздробить 2 кв. *дм*? Сколько кв. *см* в одном квадратном дециметре? Раздробите 2 кв. *дм* в кв. *см*. Запись: 2 кв. *дм* = 200 кв. *см*.

Ясные образные представления будут служить для ученика опорой в его суждениях. По мере того, как понятие и прием раздробления квадратных мер будет учениками усваиваться, учитель должен предлагать им все большие и большие числа. Впрочем особенно усложнять это раздробление нет никакого основания, так как на практике к раздроблению больших именованных чисел, содержащих квадратные меры, едва ли часто приходится прибегать.

Все упражнения в раздроблении можно разбить на такие группы:

1. Единичные отношения квадратных мер равны 100.
   а) Раздробить простое именованное число.
   б) Раздробить составное именованное число.
2. Единичные отношения квадратных мер равны 10 000.
   а) Раздробить простое именованное число (3 *га* в кв. метры).
   б) Раздробить составное именованное число (3 *га* 750 кв. *м* в квадратные метры).

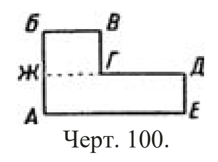
Превращение именованных чисел, выражающих площади, можно пройти по тому же плану.

План. Для первого знакомства с планом надо выбрать работу изготовления плана небольшого предмета, который весь находился бы перед глазами учащихся, например, учительского стола. Задача ставится так: начертить уменьшенное изображение стола. Один из учеников измеряет длину стола, другой ширину. Пусть длина его 12 *дм*, а ширина 8 *дм*. Чтобы начертить план в тетради, будем каждые 2 *дм* изображать одним сантиметром. Какая фигура получится в тетради? Какова будет длина, ширина прямоугольника? Делается чертеж. Такое изображение стола называется его планом.

Следующей работой будет черчение плана класса. Сперва надо сделать от руки набросок плана класса. Набросок будет служить для того, чтобы на нем у соответствующих линий отмечать числа, получаемые при измерении. После этого ученики по вызову учителя измеряют метром или лентой длину и ширину класса. Полученные числа записываются на плане, сделанном от руки.

После этих измерений план можно нанести на бумагу. Выберем масштаб. Допустим, что длина класса 7 *м* 5 *дм*, а ширина 5 *м* 4 *дм*, и план должен поместиться на четвертушке бумаги. Какой мерой обозначить 1 *м*? Если бы мы взяли вместо метра сантиметр, то длина класса оказалась бы 7 *см* 5 *мм*. Если примем 2 *см* за метр, длина будет 15 *см*. И тот и другой план поместился бы в тетради. Для удобства черчения плана приготовим масштаб. Вырежем узкую бумажную полосу и на ней отметим деления по 1 *см* в каждом: деление будет изображать, допустим, 1 *м*. Одно из делений разделим на 10 равных частей: это — дециметры. Сделаем еще надписи 0, 1, 2, 3 т. д. С помощью этого масштаба мы будем откладывать при черчении плана линии данной длины. При составлении плана ученики начинают понимать основную идею его — одинаковое сокращение всех расстояний. Чтобы эту мысль сделать более ясной, надо произвести с ними ряд измерений по готовому плану. Для этого можно изготовить на большом листе бумаги план двора с постройками или комнаты с предметами, находящимися в ней, и бумажный масштаб. Этот масштаб (мерительная линеечка) будет служить для измерения действительных расстояний. Кроме того следует предлагать ученикам упражнения в измерении расстояний по плану из задачника. Сборн. задач, 3 год, № 41.

Измерение площади по плану. Для измерения площади по плану следует заготовить карточки, на которых сделаны несложные планы с масштабами. Получив такую карточку, ученик перечерчивает масштаб (на чертеже масштаб не дан), изображенный на ней, на полоску бумаги и измеряя им стороны фигуры *АБВГДЕ*, находит действительные их размеры. Затем вычисляет площади прямоугольников *БВГЖ* и *АЖДЕ*, входящих в эту фигуру, и наконец площадь всей фигуры.



Черт. 100.

ЧЕТВЕРТЫЙ ГОД ОБУЧЕНИЯ

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА.

Во всех годах обучения в начальной школе главное место на уроках арифметики принадлежит арифметике целых чисел. Умения производить основные действия над целыми числами любой величины у учащихся, оканчивающих начальную школу, должны быть сознательными, прочными, законченными. На третьем году уже пройдены устные и письменные действия над целыми числами в пределах тысячи и миллиона: при этом письменные действия умножения и деления были ограничены случаями, когда *множитель — трехзначное, а делитель — двузначное число*.

На четвертом году требуется:

1) Изучить некоторые новые устные вычислительные приемы.

2) Пройти арифметические действия над числами четырех классов.

3) Развить у учащихся уменье решать более сложные и более трудные задачи и примеры.

Устные вычисления.

Цель устных вычислений. Уже не раз отмечалось большое образовательное значение устных вычислений в курсе начальной арифметики. В процессе устных вычислений зарождаются у детей основные понятия арифметических действий, без которых учащиеся не могли бы осмыслить механизмы письменных действий. Если мы хотим, чтобы эти понятия развивались, устные вычисления должны не только быть *исходной точкой при изучении письменных действий*, но и в дальнейшем должны постоянно *сопровождать письменные вычисления.*

В процессе устных вычислений развивается у детей вычислительная техника. В основе этой техники лежат автоматические навыки, связанные со знанием наизусть таблиц арифметических действий и состава чисел в пределах первой сотни. Вычисляя устно, дети развивают эти навыки и тем самым повышают свою вычислительную технику.

Наконец, устные вычисления развивают сообразительность и находчивость учащихся, их творческие, комбинаторные способности, уменье пользоваться так называемыми сокращенными вычислительными приемами.

Необходимо подчеркнуть, что устные действия следует производить над числами, которые удобны для этого; обременять учащихся трудными вычислениями в уме не следует.

Виды устных вычислений. Устные вычисления можно рас-сматривать со стороны их формы, со стороны их программного содержания и, наконец, со стороны их роли в развитии сообразительности и творческих способностей учащихся.

1. По своей *форме* устные вычисления достаточно разнообразны. Отметим основные подразделения, с которыми приходится встречаться учащимся на четвертом году обучения.

а) Устные вычисления можно производить над отвлеченными числами. Сюда относятся беглый счет, примеры в одно и несколько действий. Устные примеры в одно действие даются учащимся с целью привлечь их внимание к какому либо вычислительному приему, например, к вычитанию путем округления. Обыкновенно же устные примеры бывают в несколько действий. Из них более легкие даются в виде беглого счета. Например:

Умножь 8 на 30, отними половину полученного числа, остаток раздели на 24. Сколько получилось?

б) Наряду с примерами полезно решать устные задачи, а также при решении письменных задач все легкие вычисления производить в уме.

в) Легкие примеры и задачи при устных вычислениях дети решают в уме со слов учителя. Более трудные примеры учитель записывает на доске, чтобы не надо было тратить времени на их запоминание, и чтобы зрительное восприятие записи чисел облегчало самые вычисления, которые производятся устно. В сборнике для четвертого года обучения немало таких примеров, которые рассчитаны именно на этот второй, полуписьменный способ решения. Вот образцы таких примеров: $360 + 25 \cdot 6 - 140$; $450 - 24 \cdot 6 + 145$; $540 - 32 \cdot 5 + 150$ и т. д.

Точно так же, решая устную задачу из сборника, ученик будет обдумывать ее, глядя в книгу, а решение может даже записать, но не в столбик, а в строчку, производя самые вычисления в уме.

2. Со стороны *программного содержания* можно различать следующие группы устных вычислений:

а) В качестве подготовительных упражнений к действиям над числами любой величины полезно давать детям упражнения в действиях над круглыми сотнями тысяч, миллионами и миллиардами. Эти вычисления, в сущности, не труднее, чем аналогичные вычисления с круглыми сотнями, тысячами и десятками тысяч, которые дети производили устно на третьем году обучения при переходе к письменным действиям над многозначными числами. В обоих слу-

чаях задача заключается в том, чтобы научить детей производить вычисления над разрядными числами совершенно так же, как раньше они производили действия над однозначными и двузначными числами. Только достигнув беглости в этих вычислениях, учащиеся научатся сознательно производить письменные действия над числами любой величины, которые по существу сводятся к действиям над составляющими их разрядными слагаемыми.

б) Изучение десятичных дробей также опирается на устные вычисления. С них надо начинать разработку каждого нового вопроса и ими часто пользоваться в дальнейшем, чтобы механическое выполнение письменных действий над десятичными дробями не заслонило от учащихся сущности этих операций. Подробнее о такого рода вычислениях сказано в своем месте, в главе, посвященной десятичным дробям (стр. 393).

в) Действия над простыми дробями по существу своему являются устными или, во всяком случае, полуписьменными. Читая пример и записывая его решение, ученик самые вычисления производит в уме. Необходимо, чтобы, наряду с такими полуписьменными вычислениями, дети упражнялись в собственно устных вычислениях без записи, благодаря чему операции с простыми дробями становятся сознательнее. Об этом также говорится подробнее в главе о дробях (стр.393).

3. Рассмотрим теперь те устные вычисления, которые более других развивают *сообразительность и творческие способности* учащихся.

а) Сюда прежде всего относятся устные примеры, которые можно решать разными способами и которые тем самым содействуют развитию изобретательности учащихся. Так, решая пример $36 \cdot 4 + 14 \cdot 4$, можно поступить следующим образом: $36 \cdot 4 = 144$; $14 \cdot 4 = 56$; $144 + 56 = 200$. Но тот же пример можно решить и двумя действиями: $36 = 14 = 50$; $50 \cdot 4 = 200$, рассуждая так: по 36 взять 4 раза, да еще по 14 взять 4 раза — то же, что 50 взять 4 раза; или 36 четверок да 14 четверок, получится 50 четверок, что составит 200.

б) Сюда же относятся так называемые сокращенные вычисления. Сообщая детям соответствующие приемы, не следует навязывать их в готовом виде. Необходимо использовать и этот вид упражнений для развития собственного математического творчества детей. Постепенно учащиеся приобретут определенные навыки, но не следует с этим торопиться.

Далее будет идти речь о некоторых типах таких сокращенных вычислений.

Округление чисел при вычитании. Подобный прием уже встречался при сложении чисел (стр. 240). Рассмотрим прием округления чисел при вычитании. Пусть требуется отнять 98 от 235. Округляя 98, мы прибавляем к этому числу 2, получим 100. Отнимем от 235 вместо 98 число 100. Будем

иметь: 235 — 100 = 135. Отняли 100, а надо было отнять 98, отняли лишних 2 единицы, которые надо вернуть обратно, прибавив их к разности: 135 + 2 = 137. Решение первых примеров мы можем записывать подробно:

$$\begin{array}{l} \underline{235 - 98 = 137} \\ 235 - 100 = 135 \\ 135 + 2 = 137 \end{array}$$

Умножение на 25. Сокращенное умножение на 25 стоит применять в том случае, если множимое делится на 4.

Бумага разложена в 25 пакетов по 12 листов в каждом. Узнаем, сколько всего листов бумаги разложено в пакеты.

Для этого надо 12 умножить на 25. Разделим каждый пакет на 4 равные части, получим в каждой части по 3 листа. Таких частей будет 100. Бумага была разложена в 25 пакетов, по 12 листов в каждом; теперь она разложена в 100 пакетов, по 3 листа в каждом. Значит

$$12 \cdot 25 = 3 \cdot 100 = 300.$$

Умножим еще 124 на 25. По 124 возьмем 25 раз.

$$124 \cdot 25 = 124 + 124 + 124\ldots \text{ и так далее 25 раз.}$$

Разобьем каждое слагаемое на 4 равные части. Тогда вместо каждого слагаемого (124) получим 4 слагаемых, по 31 единице в каждом— всего 100 слагаемых. Поэтому

$$124 \cdot 25 = 31 \cdot 100 = 3100.$$

Сделав ряд примеров, выведем правило:

Чтобы умножить число на 25, достаточно разделить его на 4 и частное умножить на 100.

Деление на 25. Разделим 900 на 25, иначе говоря, узнаем, сколько раз 25 содержится в 900.

В одной сотне 25 содержится 4 раза, а в 9 сотнях 36 раз, потому что $4 \cdot 9 = 36$.

$$900 : 25 = 9 \cdot 4 = 36.$$

После ряда примеров сделаем вывод:

Чтобы разделить число на 25, достаточно разделить его на 100 и частное умножить на 4.

Последовательное умножение. С этим умножением учащиеся встречались на втором и третьем году обучения (стр. 247). Умножим 18 на 6, иначе говоря, 18 повторим 6 раз.

Мы это можем сделать так:

18 + 18 + 18
18 + 18 + 18

По 18 возьмем 3 раза, получим 54. Затем 54 возьмем 2 раза, получим 108.

Чтобы прием разложения множителя на сомножители был хорошо усвоен, надо подбирать группы упражнений с одинаковым множителем. Например: 36 · 6, 34 · 6, 125 · 6; 25 · 12, 75 · 12, 55 · 12 и т. д.

Решение первых примеров полезно записывать подробно:

$$35 \cdot 6 = 35 \cdot 2 \cdot 3 = 210$$
$$34 \cdot 6 = 34 \cdot 3 \cdot 2 = 204$$

Последовательное деление. Деление на сомножители делителя удобно разъяснять при помощи наглядного пособия, которое изображено на стр. 47. Разделим 222 на 6. Разделим 222 на 2 равные части и каждую часть на 3 равные части:

222 : 6					
III			III		
37	37	37	37	37	37

Тогда число 222 мы разделим на 6 равных частей.

Группы упражнений следует подобрать с равными делителями. Например:

$$288 : 6 = (288 : 2) : 3$$
$$1332 : 6 = (1332 : 2) : 3 \text{ и т. д.}$$

Нумерация.

План изучения нумерации. На третьем году была изучена нумерация чисел первых двух классов. В настоящем году требуется правила письменной и устной нумерации распространить на числа третьего и четвертого классов, сделать более ясной роль классов и разрядов в названии и записи чисел и, наконец, познакомить учеников с самими терминами — класс и разряд.

Числа каждого класса составляются из разрядных единиц и за-писываются так же, как и числа первого класса. Поэтому усвоив твердо устную и письменную нумерацию чисел первого класса, мы при названии и записи многозначных чисел главное внимание обращаем на состав их из классов. Например:

Называем числа:	375 единиц,	375 тысяч,	375 миллионов
Записываем числа:	375 ,	375 000,	375 000 000

Эти три числа при чтении их разнятся между собой только названием классовых единиц, а при записи — нулями на конце. Читая многозначное число, мы разбиваем его мысленно на классы и называем один класс за другим, уже не думая о его разрядах. Поэтому есть основание начать изучение нумерации на четвертом году с классов и классовых единиц. Затем перейти к разрядам, пользуясь для изображения состава числа счетами или таблицей. Закончить изучение нумерации следует записью чисел.

Классы числа. Припоминаем, как считают простые единицы от 1 до 999 (несколько упражнений в счете с переходом через сотню) и на каких проволоках откладывают единицы, десятки и сотни простых единиц или в каких клетках таблицы их записывают.

1000 простых единиц = 1 тысяче.

Тысячи считают от 1 тысячи до 999 тысяч так же, как считают простые единицы (примеры счета тех и других единиц).

1 000 тысяч = 1 миллиону.

Упражнения:

а) Ученики откладывают числа, названные учителем, и записывают в таблице: 3 тыс., 20 тыс., 500 тыс., 45 тыс., и др.

б) Ученики называют числа, отложенные на 4, 5 и 6 проволоках.

Миллионы считают от одного миллиона до 999 миллионов так же, как простые единицы.

1 000 миллионов = 1 миллиарду.

Упражнения:

а) Ученики откладывают названные числа миллионов и записывают их в таблице.

б) Обратно — называют числа, отложенные на 7, 8 и 9 проволоках.

Вводим название „класс“.

Простые единицы	называются	единицами	*первого*	класса
Тысячи	„	„	*второго*	„
Миллионы	„	„	*третьего*	„
Миллиарды	„	„	*четвертого*	„

Из единиц, тысяч, миллионов и миллиардов составляются числа.

Упражнения:

а) Учитель откладывает на счетах число, состоящее из двух, трех, четырех классов, а ученики называют классы числа, а затем и само число.

б) Учитель называет число, а ученики откладывают классы его на счетах и записывают в таблице.

в) Учитель называет классы: 45 ед. третьего класса, 270 ед. второго класса и 36 ед. первого класса. Ученики записывают их в таблицу и читают.

Разряды числа. Идея состава числа из тысячных и десятичных групп (из классов и разрядов) уже вошла в сознание учеников и стала прочным достоянием их мышления. Остается сообщить им слово „разряд".

Отложив на счетах число (или записав его в таблицу), разлагаем его на классы и на десятичные группы и сообщаем, что

Простые единицы называются единицами 1 разряда.
Десятки единиц „ „ 2 разряда

и т. д.

Упражнения (Сборн. задач, 4 г. № 51—55).

Чтобы сделать наглядным и легко обозримым состав числа из классов и разрядов начертим на классной доске или представим в виде плаката следующую таблицу:

4 класс Миллиарды			3 класс Миллионы			2 класс Тысячи			1 класс Единицы		
12 сотн. млрд.	11 дес. млрд.	10 един. млрд.	9 сотн. млн.	8 дес. млн.	7 ед. млн.	6 сотн. тыс.	5 дес. тыс.	4 ед. тыс.	3 сотни	2 дес.	1 единицы

Рассматривая построение таблицы, повторяем в форме беседы, свойства нумерации:

Числа составляются из простых единиц, тысяч, миллионов и миллиардов; простые единицы называются единицами 1 класса, тысячи — единицами второго класса, миллионы — единицами 3 класса, миллиарды — единицами 4 класса.

1 000 простых единиц составляют 1 тысячу.
1 000 тысяч „ 1 миллион

и т. д.

Первый класс или класс единиц состоит из единиц, десятков и сотен.

Второй класс или класс тысяч состоит из единиц тысяч или просто тысяч, десятков тысяч, сотен тысяч и т. д.

В каждом классе по три разряда.

10 простых единиц составляют 1 десяток.
10 десятков „ 1 сотню.

Таким образом, мы составляем числа из классов и разрядов. Чего мы этим достигаем? Мы достигаем этим возможности называть числа с помощью не-

многих слов. Подсчитаем, сколько требуется различных, непохожих друг на друга слов, чтобы назвать все числа до миллиарда:

Один, два, три... десять (десяток), сотня, тысяча, миллион, миллиард. Всего — 14 слов.

Запись чисел. Число уже в его наименовании разложено на классы и разряды, при этом особенно явно в названии числа обнаружены классы. Например: тридцать семь миллионов двести пять тысяч шестьдесят четыре (единицы).

Диктуя ученикам число, надо делать после названия каждого его класса небольшую остановку.

37 миллионов (остановка, запись — 37), двести пять тысяч (остановка, запись — 205), шестьдесят четыре единицы (запись — 064) : 37 205 064.

Записывая каждый класс последовательно, начиная с высшего, ученик должен сообразить, нет ли в нем пустых разрядов. Если таковые существуют, то места их отмечаются нулями.

При записи чисел, мы руководимся теми же правилами, которые служили нам для изображения чисел на счетах и в нумерационной таблице. Поэтому перед тем как записать число, его необходимо разбить на классы, затем отложить на счетах или записать в клетках таблицы. Тогда запись будет для учащихся яснее.

Кроме записи чисел, необходимо упражнять учащихся и в чтении чисел: перед тем как прочитать число, его разбивают на классы.

Упражнения, относящиеся к письменной нумерации:

а) Число, записанное в таблице, разбить на классы и разряды, затем записать без клеток.

б) Разрядные единицы числа записаны словами; записать число цифрами без слов (3 дес. млн. 5 млн. 4 сот. тыс. 6 тыс. 8 сот. 7 дес. — 35 406 870).

в) Классовые единицы числа записаны словами; записать число цифрами без слов (34 млн. 504 тыс. 715 ед. или 30 ед. III кл. 208 ед. II кл. 75 ед, I кл.)

г) Число записано в виде суммы разрядных слагаемых; записать его коротко — по правилам нумерации (2 000 000 + 40 000 + 2 000 + 70 + 5).

д) По записи числа назвать его состав из классов и разрядов; записать его при помощи сложения разрядных чисел (8 024 750 = 8 000 000 + 20 000 + 4 000 + 700 + 50).

После ряда упражнений в записывании и в чтении чисел ученикам должны стать ясными следующие два принципа письменной нумерации:

Записывая число, его разбивают на классы, а каждый класс на разряды. Первый разряд записывают на 1 месте, считая от правой руки к левой; второй разряд на 2 месте и т. д.

Одна и та же цифра может изображать число единиц любого разряда; место же цифры зависит от того, какие единицы она изображает.

Надо только помнить, что понимание принципов устной и письменной нумерации и уменье называть числа последовательно одно за другим, читать

и записывать их составляет главную цель изучения нумерации. Механическое заучивание правил устной и письменной нумерации не составляет этой цели и не ведет к ней.

Округление числа. Термины „круглое“ число, „округлить“ числа уже известны (стр. 240). Прежде всего научим округлять числа до тысяч и до миллионов. Это будем делать на примерах. В городе 73 248 жителей. Можно сказать: в этом городе 73 000 жителей с лишком. Мы округлили число жителей д о т ы с я ч.

Так же округлим до тысяч числа: 17 348, 285 427, 2 374 120 и др.

В 1933 г. в СССР было 224 600 колхозов. Округлим это число до тысяч. Мы могли бы сказать, что колхозов у нас было в этом году 224 000 с лишком или почти 225 ООО. Из этих двух чисел второе меньше разнится от 224 600, чем первое. Потому в нашем примере, округляя заданное число до тысяч, берут вместо него 225 000.

Округлим до тысяч числа: 48 700, 125 842, 137 920, 48 620 и др.

Округлим до тысяч числа: 47 340 и 47 750; 227 400 и 227 650; 370 890 и 570 280 и т. д. Далее предлагаются примеры на округление чисел до миллионов, до десятков, до сотен, до десятков тысяч.

Сложение и вычитание.

Устное и письменное сложение и вычитание. Начать сложение и вычитание на четвертом году надо с устных вычислений, под которыми в этом месте курса мы разумеем следующие группы упражнений:

а) Сложение и вычитание круглых миллионов без перехода через миллиард.

б) Сложение и вычитание круглых миллиардов.

в) Сложение и вычитание круглых тысяч с переходом через миллион (998 тыс. + 5 тыс.; 1 млн. 2 тыс. – 5 тыс.; 900 тыс. + 600 тыс.; 1 млн. 200 тыс. – – 600 тыс.).

г) Сложение и вычитание круглых миллионов с переходом через миллиард (997 млн. + 6 млн.; 1 млрд. 3 млн. – 6 млн.; 800 млн. + 400 млн..; 1 млрд. 400 млн. – 800 млн.).

Существенное для письменного сложения и вычитания уже проработано в предыдущем году. На четвертом году необходимо эти действия пройти в пределах миллиарда, обращая особенное внимание на трудные случаи, которые чаще всего приводят к ошибкам: это — случаи суммы и уменьшаемого с нулями (стр. 268—271).

Примеры сложения следует подбирать разнообразные, различая их:

а) По числу цифр слагаемых (35 487 342 + 86 302 835; 142 845 027 + 64 258).

б) По числу нулей в слагаемых (34 806 005 + 256 600; 70 009 600 + 300 050).

в) По числу разрядов, в которых сложение совершается с переходом через десяток (756 897 + 142 243 128; 48 543 277 + 8 878 958).

г) По числу нулей в сумме (13 548 726 + 6 570 274; 435 723 + 16 034 282; 34 999 997 + + 712 000 003; 85 637 000 + 1 363 000).

Примеры на вычитание будем различать:

а) По числу цифр в уменьшаемом и вычитаемом (97 364 283 – 38 523 256; 138 207 435 − 92 148).

б) По числу разрядов, в которых вычитание совершается с переходом через десяток (507 345 326 − 23 698 711; 62 112 321 − 17 814 685).

в) По числу нулей в разности (58 415 372 − 5 308 364).

г) По числу нулей в уменьшаемом (7 348 000 – 623 485; 1 200 000 – 134 002; 68 702 000 – 2 631 995; 1 000 000 − 8).

Определение сложения. На четвертом году ученики должны уже хорошо знать смысл каждого арифметического действия, определение же его должно быть приспособлено к уровню умственного развития учеников.

Складывая несколько чисел, например, 3457, 483 и 1257, ученик должен понимать, что *сумма их 5197 содержит столько единиц, сколько их во всех данных числах*. На четвертом году ученик уже может выразить эту мысль словами.

Определение вычитания. Связь действий сложения и вычитания дети улавливают весьма рано, еще на первом году обучения. Они знают: так как 8 + 7 = 15, то 15 – 8 = 7, а 15 – 7 = 8. На четвертом году эта связь будет выражена в определении действия вычитания.

Решим несколько задач на сложение и обратных задач на вычитание.

Служащий, получив зарплату, положил в сберкассу 28 руб., а остальные 109 руб. израсходовал. Вычислить его зарплату.

Задачу решаем сложением: 109 руб. + 28 руб. = 137 руб. Обратная задача:

Служащий получил зарплату 137 руб. Из них 28 руб. он положил в сберкассу, а остальные деньги израсходовал. Сколько рублей он израсходовал?

Решаем: 137 руб. — 28 руб. = 109 руб.

В первой задаче 137 — сумма, 109 и 28 — слагаемые. Решая вторую задачу, мы вычли из суммы 137 слагаемое 28 и получили другое слагаемое 109.

Решив несколько пар таких задач, сделаем вывод: *если от суммы двух слагаемых отнять одно из них, то получится другое слагаемое*.

Эта форма определения вычитания для 4 года более проста и доступна, чем другая: вычесть из одного числа другое — значит по данной сумме двух слагаемых и одному из них найти другое слагаемое.

Таким образом определение вычитания имеет форму правила. Чтобы это правило было лучше усвоено, необходимо им пользоваться при решении задач и примеров.

Приведем некоторые из них:

а) За пальто и шляпу заплатили 132 руб. Пальто стоило 109 руб. Сколько заплатили за шляпу?

По смыслу задачи число 132 может быть названо суммой, а 109 — слагаемым: надо вычислить другое слагаемое.

При вычитании 109 из 132, число 132 уже может быть названо уменьшаемым, а 109 — вычитаемым.

б) Сделать примеры: (187 + 86) − 86; (175 + 83) − 82; 175 + x = 362.

Решая примеры, ученики пользуются выведенным выше правилом.

в) Составить задачи и примеры, в которых дана сумма и слагаемое, а ищется другое слагаемое.

Соотношения между элементами вычитания. Решим несколько пар задач и примеров: 210 – 145 = 65 и 145 + 65 = 210. 210 — уменьшаемое, 145 — вычитаемое, 65 — разность. Решая второй пример, мы прибавили к вычитаемому 145 разность 65 и получили уменьшаемое 210.

В книге 70 страниц. Ученик прочитал 46 страниц. Сколько страниц осталось прочитать?

70 стр. − 46 стр. = 24 стр.

Если сложить число прочитанных страниц — 46 стр. и число непрочитанных страниц — 24 стр., то общее число должно получиться 70 стр.:

46 стр. + 24 стр. = 70 стр.

Решив несколько примеров и задач и разобрав их, мы сделаем выводы:

Если к вычитаемому прибавить остаток, то получится уменьшаемое.

Так же делаем и другой вывод: *если от уменьшаемого отнять разность, то получится вычитаемое.*

Эти выводы надо закрепить в сознании и в памяти учеников посредством примеров и задач (Сбрн. № 77—84). Понятие соотношения между сложением и вычитанием будет сознаваться учениками отчетливее, если они сами составят несколько задач и примеров, относящихся к этому понятию.

Умножение и деление.

Определение умножения. В общем виде определение умножения дано уже раньше. Это определение очень обще и в такой форме для ученика 4 года мало доступно. Гораздо лучше, если ученик 4 класса просто скажет: *умножить 48 на 6 — это все равно, что взять 48 как слагаемое 6 раз. А* для этого надо записать, как это мы делали и раньше, умножение в виде сложения:

$48 \cdot 6 = 288$	$48 + 48 + 48 + 48 + 48 + 48 = 288$
48 — множимое.	48 — одно из равных слагаемых.
6 — множитель.	6 — число слагаемых.
288 — произведение	288 — сумма.

Из этой записи видно, что множимое 48 — одно из равных слагаемых; множитель 6 — число слагаемых; произведение 288 — сумма их.

Умножить 48 на 6 — это то же, что взять 48 как слагаемое 6 раз.

Определение умножения и значение каждого из элементов умножения надо выяснить на нескольких примерах.

Определение деления. Деление есть действие обратное умножению. Это понятие сделалось давно уже достоянием сознания учащихся. Здесь требуется его выразить в доступной для учащихся форме.

Решим задачу на умножение:

Рабочий вырабатывает в день 6 руб. Сколько он вырабатывает в месяц, в котором 25 рабочих дней?

Составим две обратные задачи:

Рабочий заработал в месяц 150 руб., в этом месяце 25 рабочих дней. Сколько рублей зарабатывает он в день?

Рабочий заработал за месяц 150 руб., вырабатывая в день по 6 руб. Сколько рабочих дней было в этом месяце?

Запишем решения всех трех задач.

Первая задача:	6 руб. × 25 = 150 руб.
Вторая „	: 150 руб. : 25 = 6 руб.
Третья „	: 150 руб. : 6 руб. = 25.

В первой задаче 6 и 25 — сомножители, а 150 — произведение. Решая две другие задачи, мы делили произведение 150 на один из сомножителей и получали другой сомножитель.

Решив еще несколько подобных же групп задач и примеров и сопоставив действия, мы можем вывести определение деления в такой форме: *если произведение двух сомножителей разделить на один из них, то получится другой.*

Чтобы укрепить вывод в памяти, следует решать примеры и задачи №№ 198—201 (Сборн. задач 4 г.) и им подобные.

Соотношения между элементами деления. Между элементами деления существуют следующие соотношения:

а) Если делитель и частное перемножить, то получится делимое.

б) Если делимое разделить на частное, то получится делитель.

Эти соотношения обнаруживаются при решении задач или примеров, подобных следующим:

На класс выдали 111 тетрадей, в классе 37 учеников. Сколько тетрадей придется на человека?

В классе 37 учеников, каждому выдали по 3 тетради. Сколько тетрадей выдали?

На класс выдали 111 тетрадей, каждому ученику по 3 тетради. Сколько учеников в классе?

Запишем решения задач:

Первой задачи: 111 т. : 37 = 3 т.
Второй „ : 3 т. × 37 = 111 т.
Третьей „ : 111 т. : 3 т. = 37

В первой задаче: 111 — делимое, 37 — делитель и 3 – частное.

Во второй задаче: частное 3 умножено на делитель 37, получилось делимое 111.

В третьей задаче: делимое 111 разделено на частное 3, получился делитель 37.

Для наглядности напишем:

111	:	37	=	3
Делимое	:	делитель,	получится	частное.
3	×	37	=	111
Частное	×	делитель,	получится	делимое.
111	:	3	=	37

Делимое : частное, получится делитель.

То же соотношение удобно выясняется на примерах: 288 : 6 = 48; 48 · 6 = = 288; 288 : 48 = 6.

Если частное 48 и делитель 6 перемножить, то получится делимое 288.

Если делимое 288 разделить на частное 48, то получится делитель 6.

Решив еще несколько подобных же групп задач или примеров и сопоставив их действия, сделаем выводы в общей форме:

Если делитель и частное перемножить, то получится делимое.

Если делимое разделить на частное, то получится делитель.

Составление примеров и задач учащимися.

План проработки случаев умножения и деления на четвертом году. Умножение на третьем году ограничено случаем, когда множитель трехзначное число, а деление, когда делитель — двузначное число. На четвертом году необходимо пройти все случаи этих действий в расширенной области чисел, т. е. в пределах четырех классов.

Материал можно расположить так:

Умножение и деление на однозначное число, на разрядную единицу, на разрядное число, на двузначное, трехзначное и четырехзначное число. Кроме этого надо пройти еще особые случаи умножения и деления: а) нули между крайними цифрами множителя, б) нули на конце множимого, в) нули на конце множителя, г) нули на конце у обоих сомножителей, д) нули в частном.

Умножение на однозначное число. Начать этот случай надо с устного умножения круглых тысяч, миллионов и миллиардов. Упражнения могут быть даны в такой последовательности:

а) Умножение без перехода через миллиард:

(34 млн. × 5; 260 млн. × 3; 240 млрд. × 4).

б) Умножение с переходом через миллион или миллиард:

(600 тыс. × 5; 800 тыс. × 3; 500 млн. × 4; 800 млн. × 4; 440 тыс. × 3).

Письменное умножение на однозначное число пройдено в предыдущем году. На четвертом году надо не только повторить этот случай умножения, но и научить детей умножать однозначное число на многозначное, не переставляя сомножителей. Например, 7 · 340 075 записываем:

$$\frac{7 \cdot 340\,075}{2\;380\,525}$$

Рассуждаем так: 5 раз 7 — 35, 5 записываем, 3 — в уме; 7 раз 7 — 49, да 3 — 52; 2 записываем, 5 — в уме; нуль не умножаем, записываем 5 и т. д.

Кроме того надо предлагать ученикам сложные примеры умножения на однозначное число. Например: 840 563 · 7 + 3 · 840 563, 705 006 · 6 · 5 и т. д.

Умножение на единицу с нулями. Умножение на 10 и на 100 пройдено на третьем году. На четвертом году необходимо проработать умножение на 1000 и 10000 и сделать обобщение: чтобы умножить число на единицу с нулями (на разрядную единицу), достаточно к нему приписать столько нулей, сколько их во множителе.

Умножение на цифру с нулями. Решим ряд примеров на эти случаи:

3 784 · 30	4 008 · 50	72 687 · 5 000
3 784 · 300	4 008 · 5 000	72 687 · 50
3 784 · 3 000	4 008 · 500	72 687 · 500

Все эти случаи обобщим в одно правило: чтобы умножить число на цифру с нулями, достаточно умножить его на эту цифру и к произведению приписать столько нулей, сколько их во множителе.

Умножение на многозначное число. Так как умножение на трехзначное число достаточно полно проработано на третьем году, то в четвертом классе, на основе этого случая, уже нетрудно научить детей умножению в пределах миллиарда многозначного числа на любое многозначное. Наряду с примерами в одно действие надо предлагать ученикам и примеры в несколько действий.

Примеры иногда можно давать такие, решение которых легко контролировать. Пример:

$$1\,926 \cdot 638 + 963 \cdot 724.$$

Учащихся заинтересует тот факт, что ответ в этом примере равен 1 926 000, т. е. 1 926 · 1 000.

Или пример: 2 846 · 1 348 − 1 423 · 696. Ответ 2 846 000.

Умножение на число с нулями между крайними его цифрами. Примерами числа с нулями между крайними его цифрами (нули в середине числа) могут служить числа: 305; 2 008; 3 407; 3 075. Умножим 487 на 203.

$$\begin{array}{r} \times\, 478 \\ 203 \\ \hline 1461 \\ 97400 \\ \hline 98861 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \times\, 478 \\ 203 \\ \hline 1461 \\ 974 \\ \hline 98861 \end{array}$$

Умножим 487 на 203 с полной записью всех нулей. Число 487 возьмем 203 раза. Для этого 487 возьмем три раза, потом 200 раз и полученные произведения сложим.

Умножая 487 на 200, мы должны были умножить это число на 2 и к полученному произведению приписать 2 нуля. Сделаем наоборот: напишем во втором неполном произведении справа два нуля, а затем уже умножим 487 на 2. Обратим далее внимание учеников на то, что во втором частном произведении на конце мы могли бы и не писать двух нулей. Цифра 4 обозначала бы сотни, так как она помещается под цифрой сотен.

Умножим еще раз 487 на 203 и сделаем более короткую запись. Умножим сперва 487 на 3 и получим 1 461. Умножим 487 на 200: двух нулей писать не будем. Два раза по 7 — 14; 4 подписываем под цифрой сотен, а единицу пока запоминаем. Два раза по 8 — 16, да единица — 17 и т. д. Чтобы учащиеся усвоили твердо и со смыслом этот случай умножения, полезно сперва сделать несколько примеров с полной и сокращенной записью. Делая затем примеры только с сокращенной записью, ученики все же дают подробное объяснение умножения.

В сомножителях на конце нули. Различаем три случая умножения, когда сомножители оканчиваются нулями: 1) нули на конце множимого, 2) нули на конце множителя и 3) нули на конце обоих сомножителей.

1. Начнем с устных примеров:

30 · 5 = 150	3 дес. × 5 = 15 дес. = 150	240 · 3
300 · 5 = 1 500	3 сот. × 5 = 15 сот. = 1 500	2 400 · 3
3 000 · 5 = 15 000	3 тыс. × 5 = 15 тыс. = 15 000	24 000 · 3

Рассуждаем так: 30 = 3 дес., 3 дес. × 5 = 15 дес. или 150 и т. д.

Переходим к более крупным числам. Умножим 275 000 на 13, иначе говоря, 275 тысяч на 13.

$$\begin{array}{r l} \times\; 275 & \text{тысяч} \\ 13 & \\ \hline 825 & \\ 275 & \\ \hline 3575 & \text{тысяч} \end{array} \qquad \text{иначе} \qquad \begin{array}{r} \times\; 275000 \\ 13 \\ \hline 825 \\ 275 \\ \hline 3575000 \end{array}$$

Решаем ряд примеров, делая две записи, как это представлено здесь. Следующие примеры решаем с одной обычной записью, но объяснения даем подробные. Например, умножим 37 400 на 48. В числе 37 400 заключается 374 сотен. Умножим 374 сотни на 48. Для этого умножим сперва 374 на 48 и т. д.

2. Второй случай так же, как и первый, начнем с устных примеров. Чтобы умножить 6 на 20, умножим 6 на 2, затем полученное произведение умножим на 10 и т. д.

$$\begin{aligned} 6 \cdot 20 &= (6 \cdot 2) \cdot 10 = 120 \\ 6 \cdot 200 &= (6 \cdot 2) \cdot 100 = 1\,200 \\ 6 \cdot 2\,000 &= (6 \cdot 2) \cdot 1\,000 = 12\,000 \end{aligned}$$

От устных примеров переходим к письменным, но метод рассуждения будет тот же. Умножим 275 на 13 000: для этого умножим 275 на 13, полученное же произведение на 1 000.

$$\begin{array}{l} 275 \\ \times\; 13000 \\ \hline 825 \\ 275 \\ \hline 3575000 \end{array}$$

3. И последний случай сперва представим на устных примерах:

200 · 3 = 600	200 · 30 = 6 000	70 · 5 = 350	70 · 500 = 35 000
400 · 2 = 800	400 · 20 = 8 000	80 · 6 = 480	80 · 600 = 48 000
800 · 4 = 3 200	800 · 40 = 32 000	90 · 3 = 270	90 · 300 = 27 000

Умножим 200 на 3 — получим 600. Умножим 200 на 30 — для этого 200 умножим на 3, получим 600, затем 600 на 10, получим 6 000 и т. д.

Решив значительное число устных примеров, перейдем к письменным:

$$\begin{array}{r} 36300\\ \times\ 37\\ \hline 2\ 541\ \ \\ 1089\ \ \ \ \\ \hline 1343100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36300\\ \times\ 37\\ \hline 2\ 5410\ \ \\ 1089\ \ \ \ \ \\ \hline 13431000 \end{array}$$

Рассуждать будем так же, как и выше. Чтобы умножить 36 300 на 370, надо умножить 36 300 на 37, получим 1 343 100; последнее число умножим на 10, получим 13 431 000.

Ученики должны выучиться перемножать числа с нулями на концах по смыслу, рассуждая, после этого можно перейти к выводу правила. Пронаблюдаем разные случаи умножения чисел с нулями иа конце.

$$\begin{array}{r} 38000\\ \times\ 4\\ \hline 152000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24\\ \times\ 30000\\ \hline 720000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 37000\\ \times\ 200\\ \hline 7400000 \end{array} \qquad \text{и т. д.}$$

Пусть учащиеся подметят правила, которые затем можно выразить словами: когда сомножители оканчиваются нулями, то их перемножают, откинув нули. Затем к полученному произведению приписывают столько нулей, сколько откинули.

Деление на однозначное число. Этот случай деления изложен в отделе третьего года (стр. 283). При его проработке на четвертом году надо:

1. Предложить учащимся примеры устного деления многозначного числа на однозначное. Например:

а) 18 млн. : 3; 240 млн. : 8; 15 мрд. : 5; 180 мрд. : 9;

б) 1 млн. 200 тыс. : 4; 3 млн. 200 тыс. : 4; 1 мрд. 500 млн. : 3; 3 мрд. 600 млн. : 6.

2. Несколько примеров сделать с подробными объяснениями, требуя от учеников, чтобы они называли те десятичные группы, на которое разбивается данное число при его делении. Например: разделив число 370 530 на 5 и получив ответ 74106, ученик должен назвать десятичные группы, на которые разложено делимое: 350 000 + 20 000 + 500 + 30 = 370 530.

3. Требовать от учащихся краткой записи деления, без неполных произведений и остатков: 370 580 : $\underline{5\qquad}$

74116

4. Напоминать ученикам о том, что остатки при делении должны быть меньше делителя.

5. Определять число цифр частного по его первому разрядному числу.

6. Чаще давать ученикам примеры с нулями в частном.

7. Предлагать сложные примеры на деление. Например:

$$170\,104\,025 : 5 + 63\,916\,780 : 4$$

Деление на единицу с нулями. На третьем году деление на 10 уже пройдено (стр. 286). На четвертом году остается пройти деление на 100, 1000 и т. д. Приступая к этому делению, ученик должен владеть безукоризненными навыками в выделении из данного числа его десятичных единиц — десятков, сотен, тысяч и т. д. Эта операция весьма важна и для других случаев деления. На вопрос, сколько всего сотен в числе 3 402 520, ученик должен ответить безошибочно и должен уметь свой ответ обосновать.

Методику деления на 10 можно в полной мере применить и к делению на 100, на 1000 и т. д. Разберем случай деления на 100. Упражнения начнем с простейших: 500 : 100; 1000 : 100; 2000 : 100; 2 500 : 100; 10 000 : 100; 30 000 : 100; 48 500 : 100 и т. д.

Пусть надо разделить 3 485 700 на 100. Для этого узнаем, сколько раз 100 содержится в этом числе или сколько сотен в данном числе. В числе 3 485 700 заключается 34 857 сотен; иначе скажем — 100 содержится в этом числе 34 857 раз, или 3 485 700 : 100 = 34 857.

Проделав ряд примеров деления на 100, на 1 000, на 10 000, сделаем вывод: чтобы разделить число на единицу с нулями, достаточно откинуть в нем справа столько нулей, сколько их в делителе.

Разделив по этому правилу 734 525 на 100, получим частное 7 345 и остаток 25, т. е. 734 525 : 100 = 7 345 (ост. 25).

Деление на цифру с нулями. Случай деления на круглые десятки изучался на третьем году (стр. 286). На четвертом году уроку деления на круглые сотни надо предпослать повторение деления на круглые десятки.

В делении на круглые сотни различают два случая: 1) деление па круглые сотни при однозначном частном, 2) деление на круглые сотни любого числа.

Первый случай деления составляет основу второго. Действительно, чтобы разделить 37 854 000 на 600, надо уметь разделить 3 785 на 600.

1. Разделим 3 200 на 400. Для этого узнаем, сколько раз 4 с. содержатся в 32 с. Получается 8 раз, так как 400 · 8 = 3 200. Значит, чтобы разделить 3 200 на 400, достаточно 32 разделить на 4. На этот случай деления надо дать ученикам ряд примеров, среди которых должны быть и примеры на деление с остатком. У учеников вырабатывается навык делить на *цифру* сотен. Так, деля 5 700 на 800, ученик будет делить 57 на 8. Получив цифру 7, надо найти остаток. Для этого надо сперва узнать, сколько единиц разделено: 800 · 7 = 5 600. Далее узнать, сколько единиц в остатке: 5 700 − 5 600 = 100.

2. После того как деление на круглые сотни при однозначном частном учениками усвоено, деление любого числа на круглые сотни почти ничего нового сравнительно с делением на однозначное число не будет представлять. Так, разделим 4 627 800 на 600.

Разделим 4 627 тысяч на 600. Для этого разделим 46 на 6, получим 7; — 7 *тысяч*. Записываем цифру 7. Умножим 600 на 7, получим 4 200. Вычтем 4 200 из 4 627, получим 427; — 427 *тысяч* и т. д.

Надо требовать, чтобы ученики называли разрядные единицы „4 627 тысяч разделить на 600“. Само же это деление выполняют, не обращая внимания на эти разрядные единицы; просто „46 разделить на 6, получится 7“. Получив цифру 7, надо назвать разрядное число, которое оно изображает: „7 тысяч“.

Сказанное о делении на круглые сотни относится и к делению на круглые тысячи.

Деление на трехзначное число при однозначном частном. Деление на трехзначное число при однозначном частном представляет необходимую ступень к делению любого числа на трехзначное. Так, при делении числа 2 100 321 на 327, чтобы получить цифру тысяч в частном, надо уметь разделить 2 100 тыс. на 327.

Наибольшую трудность в делении на трехзначное число представляет отгадывание цифры частного. Чтобы ограничить пробы при этом отгадывании, мы избираем тот же путь, который учащимся уже известен из деления на двузначное число, округление делителя, т. е. временную замену его круглым числом и при этом чаще всего младшим круглым числом. Так, при делении 1645 на 329, мы делаем первую пробу — делим 1645 на 300 или 16 на 3. Здесь мы заменяем 329 круглым числом 300. Чтобы разделить 2 378 на 376, мы для первой пробы делим 2 378 на 300, или 23 на 3. И здесь мы заменили 376 круглым числом 300, т. е. из двух чисел 300 и 400 — младшим числом. Наконец, при делении 1 945 на 389, выгоднее в качестве первой пробы разделить 1945 на 400 или 19 на 4, так как 389 весьма близко к 400. В этом примере мы заменили 389 старшим круглым числом 400.

Воспроизведем на примерах все рассуждения, которые делает ученик при делении на трехзначное число. Решим первый из приведенных выше примеров — 1 645 : 329. Чтобы быстрее найти цифру частного, возьмем пока вместо 329 круглое число 300 и узнаем, сколько раз 300 содержится в 1645, или 3 в 16; 5 раз. Теперь узнаем, сколько раз 329 содержится в числе 1645: не 5-ли раз? Умножим 329 на 5, начиная с высших разрядов; 329 · 5 = 1 500 + 100 + 45 = = 1645. Значит цифра 5 — верна.

Разделим еще 3 450 на 468. Возьмем пока 400 вместо 468. Узнаем, сколько раз 400 содержится в числе 3 450, или 4 в 34; 8 раз.

Теперь узнаем, сколько раз 468 содержится в числе 3450; не 8-ли раз? Умножим 468 на 8, начиная с высших разрядов: 468 · 8 = 3200 + 480... Мы видим, что 8 раз много. Не 7-ли раз? 468 · 7 = 3276. Цифра 7 — верна.

По мере роста навыков в делении объяснения сокращаются и схематизируются. Так в данном примере ученик говорит:

Разделим 3450 на 468, для этого разделим 34 на 4, получим 8. Испытаем цифру 8. Для этого умножим 468 на 8 (3200 + 480...) 8 раз — много. Испытаем 7. Для этого умножим 468 на 7. Получим 3276. Цифра 7 — верна, остаток 17. Последовательность упражнений такова:

1. Деление без остатка.

а) Делитель близок к младшему круглому числу, цифра частного получается при одной пробе (452 : 226; 908 : 227; 1 368 : 228).

б) Делитель близок к младшему круглому числу, но цифра частного получается после второй пробы (1624 : 232; 1 808 : 226; 1 428 : 238).

в) Делитель — трудно округлимое число (530 : 265; 3 890 : 778; 3 390 : 678; 1 869 : 267; 1626 : 271; 1 650 : 275; 620 : 155; 972 : 162; 815 : 163; 1328 : 166; 1232 : 154).

2) Деление с остатком.

а) Делитель близок к младшему круглому числу, цифра частного получается после первой же пробы (1 056 : 324; 1 720 : 326; 1 850 : 427).

б) Делитель близок к младшему круглому числу, цифра частного получается при двух пробах (630 : 229; 850 : 234; 1 300 : 334; 4000 : 823; 2 050 : 238; 1 720 : 235; 2250 : 337).

в) Делитель — трудно округлимое число (2100 : 676; 2320 : 574; 1 120 : 271; 1 722 : 365; 2 520 : 466).

г) Делитель близок к старшему круглому числу (940 : 293; 1 305 : 389; 1 725 : 394; 2 922 : 393).

Деление на трехзначное число при многозначном частном. Ученики уже привыкли сопровождать деление кратким схематическим пояснением. Поэтому, совершая деление многозначного числа на трехзначное, они будут пояснять свои вычисления кратко. Пример — 2 100 321 : 321.

Разделим 2 100 на 327. Для этого разделим 21 на 3, получим 7. Испытаем цифру 7. Для этого умножим 327 на 7, получим: 327 · 7 = 2100 + 140 + ... 7 раз много. Испытаем 6. Для этого умножим 327 на 6, получим: 327 · 6 = = 1 800 + 20 + ... Цифра 6 — годна; получили 6 *тысяч*, записываем их. Умножим 327 на 6, получим 1962. Вычтем 1962 из числа 2 100, получим 138; 138 *тысяч*. Раздробим 138 т. в сотни, и т. д.

Последовательность упражнений:

а) Делимое — четырехзначное, пятизначное, шестизначное число и т. д. Деление совершается без остатка, без нулей в частном.

б) Деление совершается без остатка, с нулями в частном.

в) Деление — с остатком, с нулями на конце в частном.

Деление на многозначное число. Деление на многозначное число выполняется теми же способами, как и деление на двузначное и трехзначное числа. Основные случаи:

1. Деление на многозначное число при однозначном частном.
2. Деление на многозначное число при многозначном частном.

Упражнения подбираются в такой последовательности:

1. Частное — однозначное число.

а) Делитель — четырехзначное число, делимое — четырехзначное и пятизначное число. Деление без остатка и с остатком.

б) Делитель — пятизначное число, делимое — пятизначное и шестизначное число. Деление без остатка и с остатком.

2. Частное — многозначное число.

а) Деление совершается без остатка, без нулей в частном.

б) Деление совершается без остатка, но с нулями в частном.

в) Деление совершается с остатком, с нулями на конце в частном.

Нули в частном. Особое внимание надо обратить на случаи деления, когда в частном получается нуль в середине его или на конце. У учеников эти нули часто выпадают. Для избежания таких ошибок надо почаще предлагать ученикам примеры этого рода и затем при решении примеров на деление требовать, чтобы ученики называли разрядные единицы частного и определяли по первой полученной цифре число цифр частного.

Ради удобства изложения, все случаи с нулями в частном расположены здесь в одном месте. На практике же они должны встречаться ученику в каждом случае деления: при делении на однозначное число, на круглые десятки, на двузначное число, на круглые сотни и т. д.

Разберем следующие три случая: а) деление совершается без остатка, в частном на конце нули, б) деление совершается с остатком, в частном на конце нули, в) в частном нули в середине.

Поясним каждый из этих случаев примером.

а) Разделим 1 275 000 на 375. Получим в частном 3 тысячи, затем 4 сотни; следующих за сотнями разрядов в частном не имеется. Поэтому ставим на местах десятков и единиц нули.

б) Разделим 61 935 на 72. Производя вычисления, называем разрядные числа частного — 8 сот., 6 дес. Последний остаток 15 единиц — меньше 72. Единиц в частном не будет, ставим на их место нуль.

в) Разделим 5 147 205 на 735. Произведя вычисления, называем разрядное число — 7 тысяч. В частном должно быть 4 цифры. Первый остаток 2 тыс.

Раздробив их в сотни и прибавив 2 сот., получим 22 сот. При делении 22 сот. на 735 в частном сотен не будет, на их месте пишем нуль. Раздробляем 22 сот. в десятки, получим 220 дес. При делении 220 дес. на 735, в частном десятков не будет, на их месте пишем нуль. Раздробляем 220 дес. в единицы и т. д.

ЗАДАЧИ НА ЧЕТВЕРТОМ ГОДУ ОБУЧЕНИЯ.

Общая характеристика задач. На четвертом году решаются: а) арифметические задачи — приведенные и неприведенные, и б) задачи алгебраического характера.

а) Приведенные задачи в 4 — 6 действий должны стать на четвертом году для учеников не только вполне доступными, но и легкими: логическая работа, связанная с решением их, не должна нисколько затруднять учеников. Приведенные задачи на этом году служат главным образом для упражнения в выборе действий, в вычислениях и в практических расчетах счетоводного характера.

Неприведенные задачи занимают на четвертом году преобладающее место среди других видов задач и становятся в этом году доступным, актуальным материалом для развития математического мышления учеников. Когда задача не приведена, то составление плана ее решения, т. е. расчленение ее на простые задачи и расположение их в определенной последовательности, представляет собой логическую работу, требующую всегда аналитических суждений (стр. 306) и иногда умозаключений дедуктивного характера (стр. 33). Поэтому неприведенные задачи представляют ценное средство для развития мышления учеников.

Для пояснения высказанной здесь мысли разберем задачу:

Рабочий, зарабатывая в среднем в день 7 руб. 25 коп., расходовал ежедневно 4 руб. 50 коп. Остальные деньги вносил в сберкассу. В году 365 дней, из них рабочих дней 280. Сколько рублей внес рабочий в сберкассу за год?

Чтобы решить эту задачу, ученик должен ясно, образно представить себе ее содержание, отвечая на вопросы:

Ежедневно ли зарабатывал рабочий 7 руб. 25 коп.?

Ежедневно ли он расходовал деньги?

Почему для решения задачи надо знать, сколько всего дней в году и сколько из них рабочих дней?

Отчего могли образоваться у рабочего сбережения? Что такое сберкасса?

При составлении плана ученик будет исходить из общего суждения: чтобы узнать, какую сумму внес рабочий в сберкассу, надо знать его годовой заработок и годовой расход. Как видим, это суждение — аналитическое и дедук-

тивное, поскольку оно восходит от вопроса к данным задачи и является отправным для вычисления годового заработка и расхода.

При решении задачи мы не будем делать полного ее анализа, но один вопрос, имеющий значение для начала рассуждения, должен быть поставлен: в задаче требуется вычислить ту сумму, которую рабочий внес за год в кассу, что надо знать для этого? Ответ: надо знать, сколько рабочий заработал за год и сколько он израсходовал. За этим следуют составление плана и вычисление.

Часто задача затрудняет ученика подробностями технического свойства. Обойтись без них невозможно, так как сама жизнь настойчиво диктует эти задачи. Иногда задача, даже не имеющая таких подробностей, все же затрудняет ученика, потому что он не до конца понимает ее содержание. Учитель не должен забывать, что настоящее понимание содержания задачи служит ключом к ее решению. Поэтому перед решением задачи, более или менее трудной для ученика, надо добиться путем соответствующих разъяснений, чтобы ученику все в задаче было понятно, чтобы он мог образ события, составляющего содержание задачи, ясно себе представить (стр. 317).

б) На четвертом году встречаются некоторые задачи алгебраического характера, из которых два типа — деление числа на части по данной их разности или по данному отношению — в этом году должны быть усвоены учениками вполне. В „Сборнике“ задачи этих двух типов предложены под №№ 361—362, 367—376, 487, 522—524, 542—545, 553, 604, 605. В первых номерах оба типа представлены, так сказать, в обнаженном виде, далее они повторяются с разными усложнениями. Решая их, надо иметь в виду замечания, сделанные на стр. 319 этой книги. Надо обратить внимание на то, чтобы решение этих задач не совершалось механически, бессмысленно, по заученному трафарету.

Типовые задачи. Одним из действительных средств для развития уменья решать задачи служит их группировка. Задачи, решаемые одним и тем же способом, объединяются в одну группу, благодаря чему способ их решения легче и лучше усваивается учениками. Такие группы задач будем называть *типами*, а задачи этих групп — *типовыми*.

Какие же задачи целесообразно объединять в типы? Задачи в курсе арифметики можно разделить на две категории: задачи, которые ученик средней одаренности и нормально развивающийся решает свободно без особых затруднений, и задачи, решение которых может более или менее его затруднять. Среди задач второго рода могут быть задачи арифметические и задачи алгебраические. Большая часть задач второго рода находит частое применение в курсе математики и потому требует тщательной проработки в курсе арифметики. Таковы задачи на так называемое тройное правило, на пропорциональное деление, на деление числа в кратном или разностном

отношении, на смешение и др. Таким образом типовыми мы будем считать такие задачи, которые объединяются в группы по способам их решения, имеют теоретическое значение для самого курса математики и вместе с тем требуют внимания вследствие некоторой трудности их решения.

Учитель должен изучить типы задач; должен приучиться усматривать их в тех задачах, которые он предлагает ученикам; должен уметь для каждого типа подобрать соответствующую группу задач.

Считаем однако необходимым предостеречь учителей против крайностей в увлечении типовыми задачами, когда все обучение арифметике сводится к заучиванию шаблонов для решения этих задач. Опасность группировки задач по типам заключается в том, что ученик, заучивший способ решения основной задачи данного типа, склонен бывает решать другие задачи автоматически, не рассуждая. Чтобы избежать этой опасности, надо требовать от учеников толкового объяснения решения задачи. Соединяя задачи в одну группу, следует подбирать их так, чтобы они были расположены в порядке возрастающей сложности, и по возможности, разнились между собой по содержанию; не объединять в группу большого числа задач; возвращаться к задачам данного типа через известные промежутки времени; наряду с типовыми задачами предлагать ученикам неприведенные задачи, в которых тип не резко выражен. Надо иметь всегда в виду, что главное образовательное значение арифметики заключается в изучении ее теории и в сознательном, осмысленном решении задач.

В методике арифметики не вполне установлены названия основных типов задач. Все же мы постараемся дать здесь список этих типов, а затем дадим и подробный разбор некоторых из них. Вот типы задач, употребительных в начальном курсе арифметики:

1. Задачи на простое тройное правило с прямо пропорциональными величинами;

а) решаемые приведением к единице;

б) решаемые приведением к общему делителю.

2. Задачи на простое тройное правило с обратно пропорциональными величинами (простейшие случаи).

3. Задачи на сложное тройное правило (простейший случай, стр. 366).

4. Задачи на среднее арифметическое.

5. Задачи на смешение.

6. Задачи на встречу движущихся тел.

7. Задачи, в которых требуется разделить число на части — по данной разности или отношению частей.

8. Задачи, в которых требуется найти по данному числу его часть.

9. Задачи, в которых требуется вычислить по данной части числа все число.

10. Задачи, которые решаются заменой одной неизвестной величины другою (стр. 371).

11. Задачи, в которых требуется вычислить неизвестное число по данной разности двух величин (стр. 371).

12. Задачи, решаемые исключением неизвестного при помощи вычитания (стр. 372).

Первый тип. Задачи на простое тройное правило с прямо-пропорциональными величинами. Термин „тройное правило“ сохранился от глубокой старины, когда арифметические задачи соединялись в группы, которые решались механически, по определенным правилам.

Простейшие задачи с прямо-пропорциональными величинами разобраны в отделе методики второго года (стр. 233). Здесь мы будем говорить только о задачах, решаемых способом приведения к общему делителю. Чтобы пояснить этот тип задачи, приведем их образцы:

а) За 35 минут лошадь пробежала 6 *км*. Сколько километров пробежит она за 56 минут?

б) Один килограмм масла стоит 12 рублей. Сколько рублей стоят 450 *г* масла?

Сделаем попытку решить первую задачу обычным способом: узнаем, какое расстояние лошадь пробегала в одну минуту. Для этого пришлось бы 6 *км* разделить на 35, частное получилось бы в виде дроби. Попытаемся эту задачу решить, не обращаясь к дробям. Замечаем, что числа 35 минут и 56 минут имеют общий делитель — 7 минут, который содержится в первом числе пять раз, а во втором 8 раз.

1. Узнаем, сколько километров пробежала лошадь в 7 минут.

В 35 минут она пробежала 6 км, а за 7 минут она пробегала в 5 раз меньше, потому что 7 минут меньше 35 минут в 5 раз. Схема записи:

35 мин. : 7 мин. = 5
56 мин. : 7 мин. = 8
35 мин. — 6 *км*
7 мин. — 6 *км* : 5 = 1 *км* 200 *м*

2. Узнаем, сколько километров пробежит лошадь в 56 мин. За 7 мин. она пробежала 1 *км* 200 *м*, а за 56 мин. — в 8 раз больше, потому что 56 мин. Больше 7 мин. в 8 раз.

56 мин. — 1 *км* 200 *м* × 8 = 9 *км* 600 *м*.

Решим вторую задачу. Дадим просто схемы решения, из которых будут ясны и способы решения задачи:

Первый способ: 1000 *г* : 50 *г* = 20
450 *г* : 50 *г* = 9
1000 *г* — 12 руб.
50 *г* — 12 руб. : 20 = 60 коп.
450 *г* — 60 коп. × 9 = 5 р. 40 к.

Второй способ: 450 *г* = 200 *г* + 250 *г*
1000 *г* : 200 *г* = 5
1000 *г* : 250 *г* = 4
1000 *г* — 12 руб.
200 *г* — 12 руб. : 5 = 2 р. 40 к.
250 *г* — 12 руб. : 4 = 3 р.
450 *г* — 2 р. 40 к. + 3 р. = 5 р. 40 к.

Второй тип. Задачи на простое тройное правило с обратно-пропорциональными величинами. К этому типу относятся такие задачи, в которых даются три значения обратно пропорциональных величин, а ищется соответствующее четвертое значение. Образцы задач:

а) Если на подводу класть по 450 *кг* муки, то всю муку с мельницы можно привезти на 4 подводах. Сколько потребуется подвод для перевозки этой муки, если на подводу класть по 600 *кг* муки?

б) Поезд проходит путь от одного города до другого в 12 часов, делая в час по 50 *км*. Во сколько времени пройдет тот же путь поезд, который проходит в час 40 *км*?

в) 28 косцов могли бы скосить траву в 15 дней. Во сколько дней скосят эту траву 20 косцов?

Решаем первую задачу:

1) Узнаем, сколько муки надо перевезти с мельницы? (450 *кг* × 4 = = 1 800 *кг*).

2) Сколько подвод потребуется для перевозки этой муки, если на подводу класть 600 *кг*? (1800 *кг* : 600 *кг* = 3).

Подобным же способом решается и вторая задача.

Чтобы решить третью задачу тем же способом, пришлось бы воспользоваться единицей работы „человеко-день“, что было бы мало доступно для учащихся четвертого года. Поэтому обратимся к другому способу — способу „приведения к единице“.

1. Узнаем, сколько дней потребовалось бы одному косцу, чтобы скосить все сено. 28 косцов могут скосить траву в 15 дней. Одному косцу потребовалось бы времени больше — в 28 раз (15 дней × 28 = 420 дней).

2. Узнаем во сколько дней скосят траву 20 косцов. Если 1 косец может скосить траву в 420 дней, то 20 косцов сделают эту работу в 20 раз скорее (420 дней : 20 = 21 день). И этот способ решения задач, заключающих

обратно-пропорциональные величины, для учеников четвертого года труден, так как он требует рассуждений, которые явно опираются на непривычную для учащихся зависимость между обратно-пропорциональными величинами и основываются чаще всего на искусственном предположении.

Поэтому о задачах на обратно-пропорциональные величины приходится сделать такое заключение: если они решаются удобно без приведения к единице, то можно считать их пригодными для начальной школы.

Третий тип. Задачи на сложное тройное правило. Из этих задач на четвертом году мы будем брать только такие, которые заключают в себе три величины, причем та величина, значение которой ищется, прямо-пропорциональна двум другим. Например:

Чтобы прокормить 8 лошадей в течение 3 дней, надо 204 *кг* сена. Сколько сена потребуется для прокормления 12 лошадей в течение 30 дней?

В этой задаче заключаются три величины — количество лошадей, количество дней и количество сена, из которых третья величина пропорциональна каждой из двух первых.

Задачу будем решать приведением к единице:

1. Сколько сена требуется одной лошади на 3 дня?
(204 *кг* : 8 = 25 *кг* 500 *г*).

2. Сколько сена требуется одной лошади на один день?
(25 *кг* 500 *г* : 3 = 8 *кг* 500 *г*).

3. Сколько сена надо одной лошади на 30 дней?
(8 *кг* 500 *г* × 30 = 255 *кг*).

4. Сколько сена надо 12 лошадям на 30 дней?
(255 *кг* × 12 = 3060 *кг*).

Решение задачи сопровождается записью в виде схемы, поясняющей решение:

8 лош. — 3 дн. — 204 *кг*
1 „ — 3 „ — 204 *кг* : 8 = 25 *кг* 500 *г*
1 „ — 1 „ — 25 *кг* 500 *г* : 3 = 8 *кг* 500 *г*
1 „ — 30 „ — 8 *кг* 500 *г* × 30 = 255 *кг*
12 „ — 30 „ — 255 *кг* × 12 = 3060 *кг*

Четвертый тип. Задачи на среднее арифметическое. Понятия — „в среднем“, „среднее“ часто встречаются в математике и в жизни. Чтобы определить это понятие, решим несколько задач:

а) Термометр показывал температуру рано утром 7°, днем 13°. Найти среднюю температуру в этот день.

б) Чтобы узнать урожай ржи до полного ее сбора, собрали зерно с четырех аров поля; с первого ара получили 12 *кг* ржи, со второго 9 *кг*, с третьего 13 *кг* и с четвертого 10 *кг*. Найти средний урожай ржи на одном гектаре.

в) Поезд шел 5 часов, проходя по 42 *км* в час, и 8 час. — проходя по 35 *км* в час. Узнать, сколько километров в среднем проходил поезд в час?

Чтобы найти среднюю температуру в первой задаче, надо сложить числа 7 и 13 и сумму их разделить на 2. Средняя температура 10° больше 7° и меньше 13°.

Чтобы узнать средний сбор ржи с 1 *а* во второй задаче, надо сложить числа 12, 9, 13 и 10 и сумму их разделить на 4, т. е. на число слагаемых.

$$12\ кг + 9\ кг + 13\ кг + 10\ кг = 44\ кг$$

$$44\ кг : 4 = 11\ кг$$

Средний урожай ржи на 1 *га* — 1100 *кг*.

Решая задачи, подобные предыдущим, ученик усваивает понятие о среднем (вернее — о среднем арифметическом), не обращаясь к определению этого понятия. В первых двух задачах среднее число определяется с помощью двух действий — сложения и деления. В третьей задаче вычисление среднего требует двух умножений, сложения и деления. Последняя задача может быть также отнесена к типу задач „на смешение“.

Пятый тип. Задачи на смешение. Решим задачу:

1. Домоуправление купило 175 куб. *м* березовых дров по 12 руб. за кубометр и 125 куб. *м* сосновых дров по 9 руб. за кубометр. Во сколько рублей в среднем обошелся жильцам дома кубометр дров?

Запишем ход решения задачи в виде формулы:

$$\frac{12 \cdot 175 + 9 \cdot 125}{300} = 10{,}75$$

в которой

$$12 \cdot 175 + 9 \cdot 125 = 3\ 225$$

Полагая во второй формуле неизвестным один из сомножителей или в первой формуле неизвестными оба вторых сомножителя, мы придем к трем задачам:

2. Домоуправление купило несколько кубометров березовых дров по 12 руб. за кубометр и 125 куб. *м* сосновых дров по 9 руб. за кубометр. Всего на сумму 3 225 руб. Сколько купило правление березовых дров?

3. Домоуправление купило 175 кубометров березовых дров и 125 кубометров сосновых всего на сумму 3 225 руб. Кубометр сосновых дров обошелся в 9 руб. Во сколько рублей обошелся кубометр березовых дров?

4. Домоуправление купило 300 куб. *м* березовых и сосновых дров на сумму 3 225 руб. Кубометр березовых дров стоил 12 руб., а сосновых 9 руб. Сколько березовых и сколько сосновых дров купило правление?

Все эти четыре задачи относятся к типу задач на смешение. Первая задача — основная и называется задачей первого рода. В этой задаче даются количества смешиваемых веществ и их цены (или качества), ищется же цена (качество) смеси.

Вторая и третья задачи — обратные. Они принадлежат к виду арифметических неприведенных задач и весьма пригодны для решения в начальной школе, начиная со второго года обучения и далее (стр. 234).

Четвертая задача относится к виду алгебраических задач и называется задачей на смешение второго рода. В задаче на смешение второго рода даются количество смеси, цена (качество) смеси и цены (качества) каждого из смешиваемых веществ, а ищутся количества смешиваемых веществ. Решим ее. Начнем с предположения.

1. Сколько стоили бы дрова, если бы они все были березовые? (12 р. × 300 = 3 600 р.).

2. На сколько стоили бы больше дрова против той суммы, которая была истрачена правлением? (3 600 р. − 3 225 р. = 375 р.).

3. На сколько дороже стоил кубометр березовых дров, чем сосновых? (12 р. − 9 р. = 3 р.).

4. Сколько было куплено сосновых дров? Если бы все дрова были березовые, то они обошлись бы на 375 р. дороже, чем смесь. Этот излишек в 375 р. получился от того, что все сосновые дрова заменены березовыми. При этой замене каждый кубометр сосновых дров вырос в цене на 3 руб. Поэтому, сколько раз 3 р. содержатся в 375 р., столько кубометров было сосновых дров (375 р. : 3 р. = 125).

Задачи на смешение второго рода трудны; самостоятельное их решение без предварительного объяснения учителя непосильно даже для лучшего ученика. Но и с объяснениями учителя этот тип задач затрудняет средних учеников. Поэтому задачи на смешение 2 рода с предварительной методической проработкой доступны на четвертом году только для сильных учеников.

Задачи на смешение бывают разнообразного содержания, при котором „смешение“ приходится понимать в совершенно условном смысле. Например:

В колхозе под картофелем было два поля — в первом поле было 3 *га* земли, во втором 5 *га*. Каждый гектар первого поля дал 160 *ц* картофеля, а гектар второго поля 180 *ц*. Вычислить средний урожай картофеля на одном гектаре.

Задачи на смешение могут быть усложнены присоединением к основным данным типовой задачи новых данных. Например:

Домоуправление купило 175 куб. *м* березовых дров по 12 руб. за кубометр и 125 куб. *м* сосновых по 9 руб. за кубометр. Доставка дров обошлась в 450 руб. Во сколько рублей в среднем обошелся жильцам кубометр дров?

Шестой тип. Задачи, в которых два тела встречаются или одно тело догоняет другое.

1. Решим задачу первого рода:

а) Из двух городов, расстояние между которыми 630 *км*, вышли в одно и то же время два поезда — пассажирский и скорый — друг другу навстречу. Пассажирский поезд проходит 35 *км* в час, а скорый 55 *км* в час. Через сколько времени они встретятся?

Для понимания решения задачи ученику должна быть ясна картина движения поездов, которую можно представить на классной доске в виде прямой линии и передвигаемых по ней кнопок. Поезда начинают движение одновременно, в это время их разделяет расстояние 630 *км*. После одного часа езды поезда стали друг к другу ближе.

На сколько километров сблизились поезда за 1 час? (35 *км* + 55 = 90 *км*).

Прошел еще час, оба поезда вновь приблизились друг к другу на 90 *км*. И так далее: сколько раз 90 *км* заключаются в расстоянии 630 *км*, столько часов пройдет до встречи поездов.

Через сколько часов встретятся поезда? (630 *км* : 90 *км* = 7).

Запишем ход решения задачи в виде формулы:

$$\frac{630}{35 + 55} = 7$$

Полагая в этой формуле неизвестным одно из слагаемых или делимое, мы придем к новым задачам:

б) Из двух городов, расстояние между которыми 630 *км*, вышли в одно и то же время два поезда — пассажирский и скорый — навстречу друг другу. Скорый проходит 55 *км* в час. Поезда встретились через 7 час. после их выхода. Сколько километров проходит в час пассажирский поезд?

в) Из двух городов вышли в одно и то же время два поезда — пассажирский и скорый — друг другу навстречу. Скорый проходит 55 *км* в час, а пассажирский 35 *км* в час. Они встретились через 7 часов. Какое расстояние между городами?

Основную задачу можно усложнить следующим образом:

г) Скорости обоих поездов не даны; зато дано время, в которое может пройти все расстояние между городами каждый поезд.

д) Поезда выходят друг другу навстречу неодновременно: один поезд на данное время позже другого.

е) Требуется узнать, на каком расстоянии будут поезда друг от друга через данное время после их выхода.

2. Решим задачу второго рода.

а) Из деревни вышел крестьянин, который проходит 80 *м* в минуту. Через 14 минут за ним выехал другой крестьянин, который проезжает 150 *м* в минуту. Через сколько минут после выхода первого крестьянина его догонит второй крестьянин?

Движение обоих крестьян надо представить на доске графически. Первый крестьянин вышел из деревни и был в пути 14 мин., когда за ним выехал второй.

На сколько километров ушел первый крестьянин от второго за 14 мин? (80 *м* × 14 = 1120 *м*.)

Расстояние между крестьянами 1120 *м*. Первый из них продолжает путь, проходя по 80 *м* в минуту, второй начинает путь, проходя по 150 *м* в минуту. За одну минуту первый крестьянин прошел 80 *м*, а второй проехал за ним 150 *м*.

На сколько метров приближается в 1 мин. второй крестьянин к первому? (150 *м* − 80 *м* = 70 *м*.)

Расстояние между ними будет уменьшаться каждую минуту на 70 *м*. Сколько раз 70 *м* содержится в расстоянии 1120 *м*, столько минут пройдет до их встречи.

Через сколько минут второй крестьянин после его отъезда догнал первого крестьянина? (1120 *м* : 70 *м* = 16.)

Через сколько минут после выхода первого крестьянина его догнал второй крестьянин? (14 мин. + 16 мин. = 30 мин.)

Проверим решение задачи. Первый крестьянин, пока его догнал второй, был в пути 30 мин. За это время он прошел путь: 80 *м* × 30 = 2400 *м*.

Второй крестьянин за 16 мин. проехал путь: 150 *м* × 16 = 2400 *м*.

Запишем решение задачи в виде формулы:

$$14 + \frac{80 \cdot 4}{150 - 80} = 30$$

Представим себе, что в этой формуле одно из чисел 14, 80 или 150 было бы неизвестно. Тогда мы пришли бы к трем задачам:

б) Из деревни вышел крестьянин, который проходит 80 *м* в минуту. Через некоторое время за ним выехал другой крестьянин, который проезжает 150 *м* в минуту. Через 30 мин. после выхода первого крестьянина его догнал второй крестьянин. Через сколько минут после выхода первого крестьянина выехал второй?

в) Из деревни вышел крестьянин. Через 14 мин. за ним выехал другой крестьянин, который проезжает 150 *м* в минуту. Через 30 мин. после выхода первого крестьянина его догнал второй крестьянин. Сколько метров проходил в минуту первый крестьянин?

г) Из деревни вышел крестьянин, который проходил по 80 *м* в минуту. Через 14 мин. за ним выехал другой крестьянин. Через 30 мин. после выхода

первого крестьянина его догнал второй. Сколько метров в минуту проезжал второй крестьянин?

Успешность решения задач шестого типа зависит от того, насколько ярко представляет себе ученик все подробности движения тел. Это замечание относится особенно к задачам второго рода, которые много труднее задач первого рода. Поэтому учитель, приступающий к этим задачам, должен обдумать средства, с помощью которых все движения, встречающиеся в задачах, можно сделать наглядными. Таким средством может служить чертеж на доске или инсценировка этого движения с помощью двух ребят. Во всяком случае задачи этого типа полезны для развития образного мышления.

Седьмой, восьмой и девятый типы. Эти типы изложены в других местах книги, а именно задачи, в которых требуется: а) разделить число на части по данной их разности или отношению на стр. 319; б) найти по данному числу его часть на стр. 327; в) найти все число по данной его части на стр. 384.

Десятый тип. З а д а ч и, к о т о р ы е р е ш а ю т с я з а м е н о й о д н о й н е и з в е с т н о й в е л и ч и н ы д р у г о ю. Образец такой задачи:

На заводе 14 малых печей и 4 больших печи выплавляют в сутки 4 500 *т* стали. Большая печь выплавляет столько стали, сколько 4 малых. Сколько стали выплавляет малая печь и сколько большая?

Разобрав содержание задачи, мы обращаем внимание учеников на то, что 4 500 *т* стали дают в сутки 14 малых печей и 4 больших; по этим данным мы не можем узнать, сколько стали выплавляет малая или большая печь. Но в задаче сказано, что одна большая печь работает так же, как 4 малые печи. Нельзя ли заменить большие печи малыми так, чтобы выплавка стали не изменилась? Сколько надо поставить малых печей вместо 4 больших? И т. д. Способом замены можно решить две такие задачи:

12 лимонов и 20 апельсинов стоят 62 руб. Апельсин дороже лимона на 70 коп. Сколько стоит лимон и сколько стоит апельсин?

12 лимонов и 20 апельсинов стоят 62 руб. 40 коп. Апельсин вдвое дороже лимона. Сколько стоит лимон и сколько апельсин?

Одиннадцатый тип. З а д а ч и, в к о т о р ы х т р е б у е т с я в ы ч и с л и т ь н е и з в е с т н о е ч и с л о п о д а н н о й р а з н о с т и д в у х в е л и ч и н. Этот тип задач может быть представлен следующей задачей:

Крестьянин вывез на рынок два мешка муки: в первом мешке 56 *кг*, а во втором 49 *кг*. Первый мешок он продал на 3 р. 92 к. дороже второго. Сколько стоит килограмм муки?

Решая эту задачу, мы сравниваем, с одной стороны, вес одного и другого мешка, а с другой, стоимость того и другого мешка: в первом мешке на 7 *кг*

больше муки, чем во втором; первый мешок на 3 р. 92 к. дороже. Следовательно, 7 *кг* муки стоят 3 р. 92 к.

Такие задачи встречались на третьем году. Их можно усложнить:

Чтобы уплатить свой долг, кооператив предложил: кусок материи в 35 *м* и в придачу 120 руб. или кусок такой же материи в 29 *м* и 168 руб. Узнать долг кооператива.

35 *м* материи и 120 руб. вместе составляют такую же сумму, как 29 *м* материи и 168 руб.

Узнаем, на сколько метров больше материи в первом куске (35 *м* − 29 *м* = = 6 *м*) и на сколько больше вторая сумма денег (168 р. − 120 р. = 48 р.).

Сравним кусок материи и сумму денег в первом и во втором предложениях:

29 *м*	материи	120 р. и еще 6 *м*
29 *м*	„	120 р. и еще 48 р

В первый раз кооператив предлагал на 6 *м* материи больше, чем во второй раз. Во второй раз он предлагал на 48 р. больше, чем в первый раз. Значит 6 *м* материи стоят 48 р.

Этот тип задач составляет переход к следующему — двенадцатому типу задач.

Двенадцатый тип. Задачи на исключение неизвестного при помощи вычитания. Простейшие задачи этого типа уже встречались на третьем году (стр. 320). Несколько таких задач следует решить и на четвертом году; они облегчат переход к более трудной задаче:

На швейной фабрике сшили 26 пальто и 45 костюмов. На все эти пальто и костюмы пошло 209 *м* сукна, а на одно пальто и на один костюм вместе идет 5 *м* 7 *дм*. Сколько сукна пошло на одно пальто и сколько на один костюм? Запишем:

На 26 пал. и 45 кост. — 209 *м* сукна
„ 1 „ и 1 „ — 5 *м* 7 *дм*.

Узнаем, сколько сукна идет на 26 пальто и 26 костюмов? (5 *м* 7 *дм* × 26 = = 148 *м* 2 *дм*).

На 26 пал. и 45 кост. — 209 *м* сукна
„ 26 „ и 26 „ — 148 *м* 2 *дм*.

И т. д.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ.

Обыкновенные дроби в практической жизни находят не столь широкое применение как десятичные, однако их теоретическое значение очень велико. Дроби, как класс чисел, представляют собой необходимое звено в развитии числового понятия. Они составляют большой и важный отдел в элементарной

и высшей математике. Поэтому обыкновенные дроби должны в курсе математики занимать место, соответствующее их теоретическому значению.

Курс дробей четвертого года, как и предыдущих годов, следует рассматривать, как подготовительный к систематическому курсу дробей следующего года. Поэтому содержание этого курса весьма ограничено: в него входят дроби, составленные из долей $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{100}$; действия ограничиваются сложением и вычитанием, и совершаются по соображению, не опираясь ни на какие правила, по крайней мере, явно выраженные.

Все операции с дробями учащиеся в этом году объясняют, руководясь живым образом дроби и хорошо усвоенной схемой рассуждения, и тем избегают слепого автоматизма, заслоняющего образ дроби и являющегося постоянным источником нелепых ошибок.

Эти особенности курса дробей четвертого года оправдывают его название — сокращенный и наглядный, подготовительный по отношению к систематическому курсу дробей.

На четвертом году прорабатываются следующие вопросы из этого курса:

1. Образование и преобразование дроби.	а) Образование дробей. б) Преобразование целого и смешанного числа в дробь и обратно. в) Раздробление долей в более мелкие доли и превращение долей в более крупные доли. г) Сравнение дробей.
2. Сложение и вычитание дробей.	а) Знаменатели дробей одинаковы. б) Знаменатель одной дроби делится на знаменатель другой дроби. в) Ни один из знаменателей не делится на другой.
3. Нахождение числа по данной части его.	а) Нахождение числа по одной доле его. б) Нахождение числа по нескольким долям его.

Образование и преобразование дробей.

Образование дробей. Вопрос этот распадается на следующие части:

1. Образование долей единицы.
2. Образование дроби, меньшей единицы.
3. „ „ равной единице.
4. „ „ большей единицы.
5. Образование смешанного числа.

Метод образования всех видов дроби на четвертом году остается тот же, что и в предыдущем году: фактическое деление предметов — кругов, полос, линий на равные части. На четвертом году понятие дроби вырабатывается на предметах, но в сознании ученика оно может существовать отвлеченно, как понятие части единицы, отрываясь от своего предметного образа.

Так как источником представлений и понятий о дробях и о действиях над ними служат предметы и части предметов, то на четвертом году, как и на третьем, необходим набор *классных пособий* для обучения дробям, а для каждого ученика — набор цветных поло с и кругов (дробный набор), как целых, так и разделенных на части.

1. В этом году ученик усваивает доли $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{100}$, как части предметов. В качестве наглядных пособий удобно брать полосы и отрезки прямых, которые ученики зарисовывают в тетрадях. Надо обращать внимание учащихся на способ получения шестых долей из третей, двенадцатых долей из третей и из шестых, десятых долей из пятых. Этот вопрос весьма важен для укрепления понятия о последовательном делении и для дальнейших операций с дробями.

2. Соединяя равные доли предмета, ученик получает восприятие дроби: так, чтобы получить $\frac{5}{6}$, полосы, надо ее разделить на 6 равных частей и из них 5 частей соединить. Представление об образовании правильной дроби в сознании учеников должно быть отчетливо, так как оно явится основой для дальнейших операций с дробями. Термин *правильная дробь* — необязателен.

3. Имея конкретное представление об образовании доли единицы, например, пятой части единицы, ученик должен понимать, что полоса имеет 5 пятых ее, что единица равна 5 пятым (неправильная дробь).

4. Неправильную дробь, например, $\frac{5}{3}$ полосы, ученики получают так: вынимают из своего набора дробных пособий полосу, разделенную на 3 равные части и берут все эти три трети; затем находят вторую такую же полосу, разделенную на 3 части, и из них берут две трети, получается 5 третей полосы. В отвлеченной форме — чтобы получить 5 третей единицы, надо взять единицу, разделить на три равные части и взять все три ее части; затем взять вторую единицу, разделить на 3 равные части и из них взять 2 трети, а всего — 5 третей.

Понятие об образовании неправильной дроби должно быть совершенно отчетливо и привычно.

5. О смешанном числе, например $2\frac{3}{10}$, ученик имеет такое представление: чтобы найти $2\frac{3}{10}$ полосы (полоса длиной в дециметр), надо взять две полосы и еще 3 десятых полосы. В отвлеченной форме: чтобы получить $2\frac{3}{10}$ единицы, надо взять 2 ед. и еще 3 десятых единицы.

На четвертом году ученики должны научиться совершенно бегло записывать и читать дроби. Запись и чтение дроби следует связать с процессом ее образования, при изучении образования дробей на пособиях. Цифровой и предметный образ дроби должны существовать в сознании детей нераздельно. Только при таких условиях ученик будет понимать смысл записи дроби. Читая или записывая дробь $\frac{3}{10}$, н должен понимать ее так: единица разделена на 10 равных частей и из них взято 3 части, короче, десятая часть единицы взята 3 раза.

Чтобы добиться правильного понимания записи дроби, можно ученикам давать упражнения: взять такую часть полосы (из дробного набора), какая записана на доске; пояснить на линиях записанные на доске дроби.

Термины — *дробь*, *числитель* и *знаменатель* должны быть известны ученикам четвертого года.

Преобразование дробей. Преобразование дробей распадается на следующие случаи:

1. Преобразование целого числа в дробь.
2. Преобразование смешанного числа в дробь.
3. Исключение целого числа.
4. Раздробление долей в более мелкие доли.
5. Превращение долей в более крупные доли.

В этой последовательности пройдем все виды преобразования.

Преобразование целого и смешанного числа в дробь.

Основу этого преобразования составляет представление об единице, как о совокупности долей. Таким образом ученик, приступающий к этому преобразованию, должен знать, что $1 = \frac{3}{3}$, $1 = \frac{4}{4}$, $1 = \frac{5}{5}$ и т. д.

Упражнения можно вести в такой форме: возьми три полосы, сосчитай, сколько в них пятых частей полосы. Ученик заменяет каждую полосу пятыми долями и находит ответ 15 пятых. Отвлеченно: сколько пятых в 3 единицах? Отв.: в одной единице 5 пятых, в трех единицах 15 пятых.

Запись: $1 = \frac{5}{5}$, $3 = \frac{15}{5}$.

Можно ставить требование и так: раздробить 4 единицы в трети, 2 единицы в десятые доли. Таким способом — то на пособиях, то отвлеченно — ученик раздробляет 2 ед., 3 ед., 4 ед., — в трети, пятые, шестые, десятые, двенадцатые, сотые части.

Перейдем к преобразованию смешанного числа. Основу этого преобразования составляют — представление об единице и о правильной дроби, как о совокупности долей единицы. Раздробим $2\frac{2}{3}$ в трети. Будет ли ученик эту операцию совершать конкретно или отвлеченно, способ рассуждения остается тот же: в единице 3 трети, в двух единицах 6 третей, да еще 2 трети, всего — 8 третей. Подробная запись здесь показана. По мере того, как ученик будет овладевать этой операцией, запись будет ограничиваться одной последней строкой.

$$1 = \frac{3}{3}$$
$$2 = \frac{6}{3}$$
$$2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Исключение целого числа из неправильной дроби. Основу этого преобразования составляет представление о том, что $\frac{3}{3} = 1, \frac{5}{5} = 1, \frac{6}{6} = 1$ и т. д.

С этого простейшего случая преобразования и надо начать. После этого ученики, по предложению учителя, набирают 6 третей круга и из них составляют 2 полные круга. Рассуждение: 3 трети круга составляют полный круг, а 6 третей — 2 круга. Отвлеченно: 3 трети единицы составляют единицу, а 6 третий — 2 единицы.

Запись: $\frac{3}{3} = 1, \frac{6}{3} = 2.$

Так же преобразуют в целое число: $\frac{9}{3}, \frac{10}{5}, \frac{15}{5}, \frac{12}{6}, \frac{30}{10}, \frac{24}{12}$.

Вопросы можно составить в таких формах: сколько единиц в дроби $\frac{9}{3}$? Преврати $\frac{6}{3}$ в единицы. Исключи целое число из дроби $\frac{10}{5}$. Краткая запись: $\frac{10}{5} = 2.$

Переходим к случаю преобразования неправильной дроби в смешанное число. Поставим сперва вопрос конкретно: набери 8 третей круга, составь из них полные круги.

Ученик рассуждает так: 3 трети круга составляют полный круг, еще 3 трети — полный круг, остается еще 2 трети. Из 8 третей круга выходят 2 полных круга и 2 трети.

В отвлеченной форме: исключить целое число из дроби $\frac{10}{3}$, иначе — узнать, сколько единиц в дроби $\frac{10}{3}$. Рассуждаем: 3 трети составляют 1 единицу, 6 третей — 2 единицы, 9 третей — 3 единицы; остается еще 1 треть. Следовательно $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$. Подробная запись, отражающая ход рассуждения показана на стр. 377.

$\frac{3}{3} = 1$

$\frac{9}{3} = 1$

$\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$

При выборе упражнений можно держаться последовательности долей: $\frac{3}{3}, \frac{6}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{5}, \frac{10}{5}, \frac{14}{5}$ и т. д.; затем в разбивку: $\frac{12}{5}, \frac{7}{3}, \frac{19}{8}$ и др. (Сборник №№ 380–382, 385).

Раздробление долей. На третьем году учащиеся уже занимались раздроблением долей и успели приобрести некоторые навыки. На четвертом году эти навыки надо укрепить, приучая в то же время учеников пользоваться в преобразованиях рассуждением.

Основу преобразования долей в более мелкие доли составляют представления: о последовательном делении предмета и о единице, как о совокупности долей.

В раздроблении долей будем держаться такой последовательности.

1) Раздробление отдельных долей:

а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$, б) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$.

2) Раздробление дробей:

а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}$.

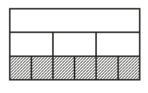
Начнем с повторения: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}, \frac{1}{2} = \frac{4}{8}, \frac{1}{4} = \frac{2}{8}, \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

Решая эти примеры, ученики дают подробные объяснения.

Перейдем к новым долям. Раздробим 1 треть полосы в более мелкие доли. В какие доли можно раздробить $\frac{1}{3}$? Можно ли ее раздробить в четверти, пятые доли, в шестые, в восьмые, в двенадцатые? Рассуждение ведем так:

В целой единице 3 трети, в целой единице 5 пятых. Из пятых долей нельзя составить 1 треть.

В целом — 3 трети, в целом — 6 шестых. Поэтому в 1 трети заключается 2 шестых. Эти рассуждения иллюстрируются на пособии (черт. 101).



Черт. 101.

Запись:

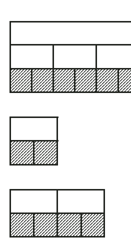
$$\frac{3}{3} = \frac{6}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

Так же раздробим $\frac{1}{3}$ в двенадцатые доли, в десятые доли. Итоги представим в виде следующей таблицы (см. стр. 378).

Если раздробление отдельных долей проработано хорошо, лабораторным методом, то ученики должны бегло отвечать на требование: раздроби в более мелкие доли $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ т. д.

После этого можно перейти к раздроблению дроби. Раздробим $\frac{2}{3}$ в шестые доли. Воспользуемся пособием, изображенным на черт. 102.



Черт. 102.

Рассуждение ведем так: в единице 3 трети или 6 шестых; в 1 трети — 2 шестых (треть полосы заменяется шестыми); в 2 третях — 4 шестых (2 трети полосы заменяются шестыми). Запись:

$$\frac{3}{3}=\frac{6}{6}$$
$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$$
$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$$

	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{8}$		$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{12}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{6}$		$\frac{3}{9}$		$\frac{4}{12}$
$\frac{1}{4}$			$\frac{2}{8}$			$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{5}$					$\frac{2}{10}$	
$\frac{1}{6}$						$\frac{2}{12}$

	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{8}$		$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{12}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{6}$		$\frac{3}{9}$		$\frac{4}{12}$
$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{6}$		$\frac{6}{9}$		$\frac{8}{12}$
$\frac{1}{4}$			$\frac{2}{8}$			$\frac{3}{12}$
$\frac{3}{4}$			$\frac{6}{8}$			$\frac{9}{12}$
$\frac{1}{5}$					$\frac{2}{10}$	
$\frac{2}{5}$					$\frac{4}{10}$	
$\frac{3}{5}$					$\frac{6}{10}$	
$\frac{4}{5}$					$\frac{8}{10}$	
$\frac{1}{6}$						$\frac{2}{12}$
$\frac{5}{6}$						$\frac{10}{12}$

Превращение долей. Превращение долей в более крупные доли основывается на представлении о том, что $\frac{3}{3}=1$, $\frac{6}{6}=1$, $\frac{5}{5}=1$, $\frac{10}{10}=1$ и т. д., т. е. на преобразовании совокупностей долей в единицу.

Превращение долей есть преобразование, обратное раздроблению. Поэтому твердое знание раздробления составляет основу превращения долей.

В превращении долей будем держаться такого порядка:

1. Случай превращения дроби в одну долю единицы:

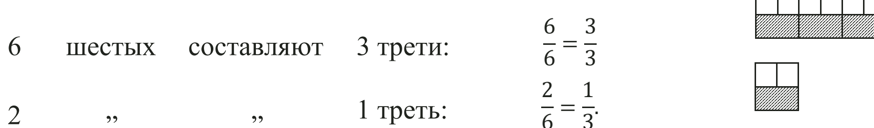
а) $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{8}$; б) $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{10}{100}$, $\frac{20}{100}$, $\frac{25}{100}$, $\frac{50}{100}$.

2. Случай превращения дроби в дробь, состоящую из нескольких долей:

а) $\frac{6}{8}$; б) $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{30}{100}$, $\frac{40}{100}$, $\frac{80}{100}$, $\frac{75}{100}$.

1. Эти превращения будем пояснять полосками, разделенными на части.

Превратим $\frac{2}{6}$ в более крупную долю. Исходим из пособия (черт. 103):

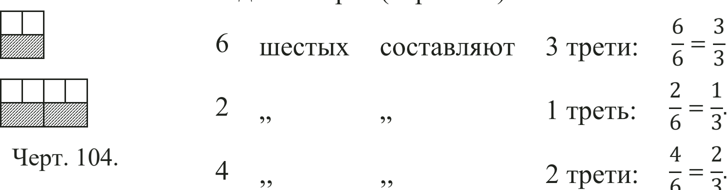


6 шестых составляют 3 трети: $\frac{6}{6}=\frac{3}{3}$

2 „ „ 1 треть: $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Черт. 103.

2. Превратим 4 шестых в более крупные доли. В рассуждениях своих будем опираться на наглядный образ (черт. 104):



6 шестых составляют 3 трети: $\frac{6}{6}=\frac{3}{3}$

2 „ „ 1 треть: $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

4 „ „ 2 трети: $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Черт. 104.

Сравнение дробей. Когда понятие дроби стало вполне ясным, необходимо установить основания для сравнения дроби с дробью и дроби с целым числом.

Сравнение дробей охватывает следующие случаи:

1. Сравнение дроби с единицей.
2. Сравнение дроби с целым числом.

3. Сравнение дробей, у которых знаменатели равны.

4. Сравнение дробей, у которых числители равны.

5. Сравнение дробей, у которых числители и знаменатели соответственно неравны.

1. Сравним дробь с единицей:

Что больше: $\frac{3}{4}$ или 1?

Что больше: $\frac{5}{5}$ или 1?

Что больше: $\frac{7}{5}$ или 1?

Данные здесь дроби и единицу можно представить наглядно, например, $\frac{5}{5}$ круга и целый такой же круг.

2. Сравниваем неправильную дробь и целое число.

Что больше: $\frac{10}{3}$ или 4?

Для сравнения чисел надо из дроби $\frac{10}{3}$ исключить целое число.

3. Сравниваем дроби, у которых знаменатели равны, например, $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{5}$. Способ сравнения основывается на образовании этих дробей. (Учебн. ч. 3, стр. 49).

Сравниваем дроби, у которых числители равны 1. Например, $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{5}$. Чтобы сравнить эти дроби, надо представить себе их образование: чтобы получить $\frac{1}{5}$, надо единицу разделить на 8 равных частей; чтобы получить $\frac{1}{5}$, надо такую же единицу разделить на 5 равных частей. Следовательно $\frac{1}{5}$ больше $\frac{1}{8}$.

Сравним еще дроби $\frac{3}{8}$ и $\frac{3}{5}$.

Сравнение основывается на способе образования дробей. Чтобы получить первую дробь, мы единицу разделили на 8 равных частей и таких частей взяли 3. Чтобы получить вторую дробь, мы разделили единицу на 5 равных частей и таких частей взяли также 3. Пятые доли крупнее, чем восьмые. Долей в обеих дробях поровну. Поэтому вторая дробь больше.

Сравнение дробей $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{5}$, а также $\frac{3}{8}$ и $\frac{3}{5}$.необходимо представить наглядно, при помощи двух полос, расположенных одна над другой.

5. Сравним дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{6}$. Какая из них больше? Для сравнения надо дробь $\frac{2}{3}$ раздробить в шестые доли: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Следовательно дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{6}$ — одинаковы. Сравним дроби $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{10}$. Раздробим $\frac{2}{5}$ в десятые доли: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$. Так как $\frac{4}{10}$ больше $\frac{3}{10}$, то и $\frac{2}{5}$ больше $\frac{3}{10}$. Сравним еще дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$. В какие доли можно раздробить треть? четверть? В какие одинаковые доли можно раздробить треть и четверть? Отв.: в двенадцатые доли. Раздробляя $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$. — в двенадцатые доли, находим:

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}.$$

Следовательно $\frac{3}{4}$ больше $\frac{2}{3}$. Представить то же наглядно.

Сложение и вычитание дробей.

Случаи сложения и вычитания дробей. Сложение и вычитание дробей удобно проходить в таком порядке:

1. Знаменатели дробей одинаковы.
2. Знаменатель одной дроби делится на знаменатель другой дроби.
3. Знаменатель одной дроби не делится на знаменатель другой дроби.

Основу сложения и вычитания дробей составляют ясные, конкретные образы дробей и навыки в преобразовании дробей. Если учащиеся занимались сложением дробей на втором и третьем годах и приобрели ясные, конкретные представления о дробях, то на четвертом году при сложении и вычитании дробей наглядные пособия будут требоваться не так часто.

На четвертом году, как и на третьем, складывая и вычитая дроби, учащиеся руководятся не правилами, а рассуждениями, которые основываются на образах дробей.

Сложение и вычитание дробей, имеющих одинаковые знаменатели. Этот случай сложения и вычитания хорошо знаком ученикам. Надо обратить особое внимание на сложение и вычитание смешанных чисел и на те случаи, когда сумма и разность дробей представляют собою сократимые дроби. Например:

$$1\frac{5}{6} + 2\frac{5}{6} \qquad 2\frac{3}{8} - 1\frac{5}{8}.$$

Сложение и вычитание дробей, когда знаменатель одной дроби делится на знаменатель другой дроби. В качестве образца 1) сложим дроби: $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$ и 2) сделаем вычитание: $2\frac{1}{3} - \frac{5}{6}$.

1) Сложим дроби $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$. Представим их в виде секторов круга.

Складывая $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$ мы узнаем, сколько шестых получится в сумме.

Первый шаг. Узнаем, сколько шестых в $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. Заменяем треть круга шестыми долями его.

Второй шаг. К $\frac{2}{6}$ прибавить $\frac{1}{6}$, получим $\frac{3}{6}$.

Третий шаг. $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Все эти этапы будут отображены в записи:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}= \frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Сложим дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{6}$. Представим эти дроби наглядно.

Первый шаг: раздробим $\frac{2}{3}$ в шестые доли: в 1 единице — 6 шестых, в 1 трети — 2 шестых, в 2 третях 4 шестых. Заменяем трети круга шестыми долями.

Второй шаг: сложим $\frac{4}{6}$ и $\frac{5}{6}$ получим $\frac{9}{6}$.

Третий шаг: $\frac{9}{6} = 1\frac{3}{6} = 1\frac{1}{2}$.

Запись расположим в такой последовательности:

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{4}{6}+\frac{5}{6}=\frac{9}{6}=1\frac{3}{6}=1\frac{1}{2}.$$

2) Вычтем из $2\frac{1}{3}$ дробь $\frac{5}{6}$. Прежде всего заменим $\frac{1}{3}$ шестыми долями: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. Будем вычитать из $2\frac{2}{6}$ дробь $\frac{5}{6}$. Но вычесть $\frac{5}{6}$ из $\frac{2}{6}$ невозможно. Поступим здесь так же, как при вычитании именованных чисел, например, 5 *см* из 2 *дм* 2 *см*. Как делается это вычитание?

Возьмем из 2 единиц одну единицу, раздробим ее в шестые доли, получим 6 шестых да 2 шестых — 8 шестых. От $\frac{8}{6}$ отнимем $\frac{5}{6}$, получим $\frac{3}{6}$ или $\frac{1}{2}$. Получим остаток $1\frac{1}{2}$. Повторим весь ход вычисления:

Первый шаг. $\frac{1}{3}$ раздробим в шестые, получим $\frac{2}{6}$.

Второй шаг. Взяли из 2 единиц одну единицу, раздробили $1\frac{2}{6}$ в шестые доли, получили $\frac{8}{6}$.

Третий шаг. От $\frac{8}{6}$ отняли $\frac{5}{6}$, получили $\frac{3}{6}$.

Четвертый шаг. Получили в остатке $1\frac{3}{6}$ или $1\frac{1}{2}$. Все эти рассуждения изобразятся в записи:

$$2\frac{1}{3}-\frac{5}{6}=2\frac{2}{6}-\frac{5}{6}=1\frac{8}{6}-\frac{5}{6}=1\frac{3}{6}=1\frac{1}{2}.$$

Упражнения на сложение и вычитание дробей можно расположить в такие группы: сложение и вычитание дробей, составленных из

1) $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{12}$; 4) $\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$; 5) $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{100}$.

В каждой из этих групп намечаются подгруппы:

а) сложение без перехода и с переходом через единицу ($\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$; $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$; $1\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$; $\frac{2}{3}+2\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$; $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$; $1\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$).

б) Вычитание без перехода через единицу ($\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$; $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$; $2\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$).

в) Вычитание с переходом через единицу ($1\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$; $1\frac{1}{3}-\frac{5}{6}$; $1\frac{1}{6}-\frac{2}{3}$).

Сложение и вычитание дробей, в которых знаменатель одной дроби не делится на знаменатель другой дроби.

Сложим дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Изобразим их в виде секторов круга: сложим половину и треть круга. Ученики уже имели опыт сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями. Поэтому раздробим $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ в одинаковые доли: заменим $\frac{1}{2}$ круга и $\frac{1}{3}$ круга одинаковыми долями его.

Половину можно раздробить:

в четвертые, шестые, восьмые, десятые и т. д.

Треть можно раздробить:

в шестые, девятые, двенадцатые и т. д.

Поэтому обе эти дроби можно раздробить в шестые.

Первый шаг: раздробим $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ в шестые доли. Заменим половину и треть круга шестыми долями его: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ и $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

Второй шаг: сложим $\frac{3}{6}$ и $\frac{2}{6}$. получим $\frac{5}{6}$.

Запись $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{3}$.

Упражнения в сложении и вычитании дробей, в которых знаменатель одной дроби не делится на знаменатель другой, можно расположить в такие группы: сложение и вычитание дробей, составленных из

1) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$, 2) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{5}$, 3) $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$, 4) $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$,

В каждой из этих групп намечаются подгруппы:

а) Сложение без перехода через единицу и с переходом:

$$(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \frac{1}{2} + 1\frac{1}{3}; \frac{1}{2} + \frac{2}{3}; 1\frac{1}{2} + \frac{2}{3}).$$

б) Вычитание без перехода $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}; 1\frac{2}{3} - \frac{1}{2}; 1\frac{2}{3} - \frac{1}{4})$.

в) Вычитание с переходом $(1\frac{1}{2} - \frac{2}{3}; 1\frac{1}{3} - \frac{1}{2})$.

Вычисление числа по данной его части.

Общие замечания. В школьном курсе арифметики довольно видное место занимают две задачи:

Прямая задача — вычисление данной части данного числа.

Обратная задача — вычисление числа, когда дана его часть. Первая задача, во-время преподанная, не затрудняет среднего ученика. Когда же в курсе арифметики появляется вторая задача, то происходит то, что обычно бывает в преподавании со смежными понятиями — ученики начинают обе задачи смешивать, и тогда даже первая задача, которая казалась до этого момента совсем понятной, становится как будто менее ясной. Выясним причины трудного и неполного усвоения учениками второй из названных здесь задач. Прежде всего, ученики обыкновенно не понимают смысла самой задачи. Вычисляя, например, число, $\frac{2}{5}$ которого равны 36, ученики не чувствуют того, что 36 не есть все число, а только две пятых его, т. е. только две его части из пяти частей. Не вполне это сознавая и находясь под свежим впечатлением

от способа решения первой задачи, они обычно пытаются найти $\frac{2}{5}$ числа 36. Но если преподавателю напряженными усилиями и удается добиться некоторого понимания учащимися задачи, то ему часто не удается закрепить это положение, сделать понимание смысла задачи и ее решения устойчивым, постоянным: ученики продолжают — одни чаще, другие реже — смешивать обе задачи, делать ошибки, в особенности в самостоятельных работах. Методика в данном случае должна ответить на два вопроса: как довести ученика до полного понимания смысла задачи и способа ее решения и как добиться того, чтобы ученик не забывал смысла задачи, помнил способ ее решения, не смешивал обеих задач. Возникают, таким образом, два вопроса, постоянные и основные в дидактике — о средствах понимания и запоминания.

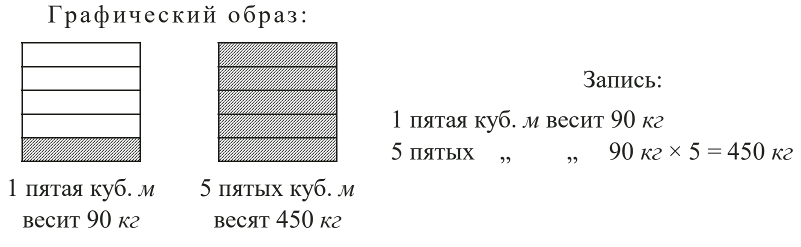
Первым из этих средств является расчленение или „ясный порядок“ (стр. 29). Задачу надо расчленить на две — нахождение числа по данной одной доле его и по данным нескольким долям его, а при решении второй из этих задач — пользоваться подробной ясной схемой записи.

Второе средство — конкретизация, образность в понимании смысла задачи и способа ее решения с подробными объяснениями.

Третье средство — повторение, т. е. возвращение к этой задаче через определенные промежутки времени с требованием от ученика подробных объяснений.

Четвертое средство — сопоставление обеих задач с выяснением смысла той и другой.

Нахождение числа по данной одной его доле. Задачи, в которых дается одна доля числа, ищется же все число, надо предлагать ученикам задолго до решения общей задачи, в которой даются несколько долей числа. При этом надо стремиться к тому, чтобы ученик вполне понимал смысл задачи.



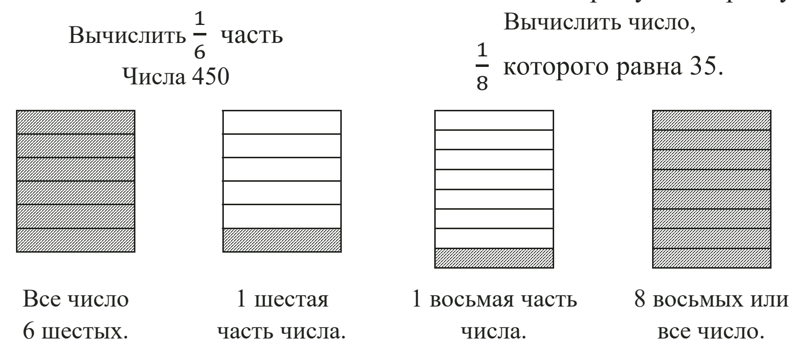
Черт. 105.

Воспользуемся задачей: 1 пятая часть кубического метра полусухих березовых дров весит 90 *кг*; сколько весит кубический метр этих дров?

Для понимания задачи и способа ее решения весьма полезны графические упражнения: найти целый отрезок прямой, если дана половина, треть, четверть его.

Так же графически можно разъяснить и решение примера: 1 шестая часть числа равна 45, найти это число.

Необходимо чаще сопоставлять две задачи — прямую и обратную.



Черт. 106.

Нахождение числа по данной его части (по данным нескольким долям его). Перейдем к вычислению целого числа по данным нескольким долям его. Первые задачи и примеры надо пояснять графически, давая подробные записи решения. Решим задачу: $\frac{4}{5}$ *кг* хлеба стоит 32 коп., сколько стоит 1 *кг*. хлеба?


Графический образ:



Черт. 107.

Запись:

4 пятых *кг* хл. стоят . . . . 32 коп.
1 пятая „ „ стоит . . . . . 32 коп. : 4 = 8 коп.
1 кг или 5 пятых стоят. . . 8 коп. × 5 = 40 коп.

Обращаем внимание учеников на то, что 32 коп. — цена не всего килограмма хлеба, а 4 пятых его. Если килограмм хлеба разделить на 5 равных частей, то только 4 такие части стоят 32 коп.

Наряду с задачами надо давать отвлеченные упражнения, например, 3 пятых неизвестного числа равны 21, найти это число. Или:

$$\frac{4}{5}x = 64; \text{ найти неизвестное число } x.$$

Ряд задач и примеров решается с подробной записью и графическим пояснением. Когда смысл задачи и ход ее решения будут учениками вполне усвоены, можно освободить решение ее от графического образа, а доли записывать цифрами, а не буквами. Для понимания задачи и способа ее решения весьма полезны графические упражнения: найти целый отрезок прямой линии, если даны $\frac{2}{3}$ его; $\frac{3}{4}$ его.

Настойчиво советуем предлагать учащимся пары задач — прямую и обратную. При решении их — сопоставлять смысл одной и другой, а также способы решения; если же ученик слабо различает их, то полезно сопоставлять графические образы решения той и другой задачи.

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ.

Цель и содержание отдела.

На четвертом году ученики вполне владеют основными понятиями нумерации и действий над целыми числами. С другой стороны, они легко преобразуют одни простейшие доли единицы в другие. Своевременно будет расширить эти понятия, распространяя их на десятичные дроби, т. е. на дроби, знаменателями которых служат числа 10, 100 и т. д. К этому соображению надо присоединить еще одно: десятичные дроби находят приложение в метрической системе мер, которую ученики успели твердо усвоить.

На четвертом году изучается сокращенный курс десятичных дробей, который обнимает:

1. Образование и запись десятичной дроби (до тысячных долей включительно).
2. Преобразование десятичных дробей и сравнение их по величине.
3. Сложение и вычитание десятичных дробей.
4. Понятие о проценте.
5. Нахождение части числа, выраженной в процентах.

Этот небольшой курс десятичных дробей должен быть усвоен учащимися сознательно, неторопливо, твердо, в конкретной форме, чтобы стать не только средством для решения задач на четвертом году, но и основой для полного систематического курса десятичных дробей на пятом году.

Образование и нумерация десятичных дробей.

Десятичные доли. Целые числа состоят из единиц, десятков, сотен и т. д.; десятичная дробь — из десятых, сотых и т. д. долей. Образование целых чисел мы начинали с изучения разрядных единиц; образование дробей начнем с десятичных долей. Лучшим пособием для изучения десятичных долей служит метр, вырезанный из миллиметровой бумаги: метр служит образом единицы, дециметр — десятой доли, сантиметр — сотой доли и миллиметр — тысячной доли.

На метре находят его десятую, сотую, тысячную долю, 3 десятых, 5 сотых, 7 тысячных и т. п.

Так образуются понятия о различных десятичных долях и об их совокупностях, иначе говоря, о разрядных числах десятичной дроби.

Соотношения между десятичными долями. Изучая отношения десятичных долей, мы решаем две группы вопросов: раздробляем крупные доли в более мелкие и превращаем мелкие доли в более крупные. При этом сперва пользуемся метром в качестве наглядного пособия, а затем от него освобождаемся.

Раздробим 1 десятую в сотые доли.

1 *м* = 100 сотым метра.

1 десятая метра = 10 сотым метра.

Вообще:

1 десятая = 10 сотым.

Подобными же рассуждениями найдем, что

1 сотая = 10 тысячным

1 десятая = 100 тысячным.

Далее переходим к преобразованию разрядных чисел. Найдем, сколько сотых метра заключается в 3 десятых метра.

1 м = 100 сотым метра

1 десятая метра = 10 сотым метра
3 десятых „ = 30 „ „

Вообще

3 десятых = 30 сотым.

Обратно, найдем, сколько десятых метра в 40 сотых метра.

100 сотых метра = 1 метру
10 „ „ = 1 десятой метра
40 „ „ = 4 десятым метра.

Рассуждая подобным же образом, будем преобразовывать разрядные доли отвлеченно, не обращаясь к наглядному пособию. Например, превратим 40 тысячных в более крупные доли:

1000 тысячных = 1 единице
10 „ = 1 сотой
40 „ = 4 сотым

Для приобретения соответствующих навыков, ученики должны решить ряд примеров: раздробить в сотые доли 1 десятую, 3 десятых и т. д.; превратить в более крупные доли 20 сотых, 80 сотых и т. д.

Состав десятичной дроби. Учащиеся поймут образование десятичной дроби из нескольких разрядов, если будут уметь:

1) составить дробь из десятых и сотых; из десятых, сотых и тысячных и т. д.;

2) разложить дробь на десятые и сотые; на десятые, сотые и тысячные и т. д.

Поясним каждую из этих групп упражнений примерами.

1. Пусть задано составить дробь из 4 десятых и 5 сотых. Воспользуемся в качестве наглядного пособия метрическими мерами. Рассуждаем так:

1 десятая метра = 1 *дм* = 10 *см*
4 десятых „ = 4 *дм* = 40 *см*
5 сотых метра = 5 *см*
40 *см* + 5 *см* = 45 *см* = 45 сотым метра.

Итак, 4 десятых и 5 сотых составляют 45 сотых.

Научившись рассуждать применительно к метрическим мерам, дети в дальнейшем будут рассуждать отвлеченно. Например, чтобы составить дробь из 3 десятых и 7 сотых, поступаем так:

1 десятая = 10 сотым
3 десятых = 30 сотым
3 десятых и 7 сотых = 30 сотым + 7 сотых = 37 сотым.

2. Пусть требуется 137 тысячных разложить на десятые, сотые и тысячные. Воспользуемся и на этот раз метрическими мерами.

1 тысячная метра = 1 *мм*
137 тысячных „ = 137 *мм*

100 *мм* = 1 *дм* = 1 десятой метра
30 *мм* = 3 *см* = 3 сотым „
7 *мм* = 7 тысячным „

Итак, 137 тысячных = 1 десятой 3 сотым 7 тысячным.

Запись десятичной дроби. Десятичные дроби записываются на основе того же поместного принципа, что и целые числа. Поэтому запись десятичной

дроби можно пояснить на том же пособии, которым ученики пользовались при изучении нумерации целых чисел.

Целая часть			Дробная часть		
Сотни	Дес.	Един.	Десятые	Сотые	Тысячные
1	1	1	1	1	1
		3	4	5	6
			2	8	
		7	9	1	

Запишем в нумерационной таблице 1 сотню, затем 1 десяток: 1 десяток в 10 раз меньше сотни и стоит справа от сотни; 1 десятая единицы в 10 раз меньше единицы и пишется справа от единицы и т. д.

Пусть учащиеся хорошо разберутся в обозначении разрядных единиц в этой сетке. Слева от двойной черты помещаются целые единицы — единицы, десятки и сотни; справа — доли единицы. Каждая единица имеет значение в 10 раз большее, чем соседняя справа единица. Таким образом, слева от двойной черты в первой графе пишутся единицы, во второй — десятки, в третьей — сотни. А справа: в первой графе — десятые доли, во второй — сотые и т. д.

Теперь уже легко записывать разрядные числа, например: 3 единицы, 4 десятых, 5 сотых, 6 тысячных и т. п.

Учащиеся упражняются в записи и чтении отдельных разрядов. Чтобы записать по клеткам таблицы дробь, в состав которой входят несколько разрядов, надо ее разложить на разрядные числа. Например, запишем по клеткам 28 сотых:

28 сотых = 20 сотым и 8 сотым
28 сотых = 2 десятым и 8 сотым.

Записываем разрядные числа — 2 десятых и 8 сотых в соответствующих графах.

Чтобы прочитать число, записанное по клеткам, например, число, записанное цифрами 7, 9 и 1, рассуждаем так: эти цифры обозначают 7 единиц, 9 десятых и 1 сотую.

1 десятая = 10 сотым

9 десятых = 90 сотым

90 сотых да 1 сотая — 91 сотая, и т. д.

Делая подобные упражнения, ученики научатся: разлагать данные им десятичные дроби для того, чтобы их записать по клеткам, и наоборот, соединять разрядные числа для того, чтобы прочесть число, записанное в таб-

лице. Так усваивают ученики идею поместного значения цифр, после чего им понятна будет обычная запись десятичной дроби. Записывая дробь под диктовку, ученик сперва разлагает ее на разрядные числа, затем записывает.

Для примера запишем число: 3 целых и 84 сотых. Разобьем его на разряды: 3 целых 84 сотых = 3 целым 8 десятым 4 сотым. Пишем 3 целых. Десятые должны стоять справа от единиц: после цифры 3 ставим запятую, которая отделяет целую часть от дробной. Цифра сотых (4) записывается справа от цифры десятых. В результате получаем запись: 3,84.

После ряда упражнений в записи десятичных чисел учащиеся должны усвоить следующее правило: в записи десятичной дроби после запятой справа пишут

на	первом месте	— десятые
„	втором „	— сотые
„	третьем „	— тысячные.

Теперь уже можно предложить детям читать и записывать такие десятичные дроби, у которых на месте десятых или сотых стоит нуль.

Прочтем дробь 3,045. В этой дроби 3 единицы 4 сотых 5 тысячных:

4 сотых = 40 тысячным
40 тысячных + 5 тысячных = 45 тысячным.

Читаем: 3 целых и 45 тысячных.

При чтении числа ученик руководится значением последней справа цифры. Прочтем число 7,305. Цифра 5 обозначает тысячные, поэтому читаем: 7 целых и 305 тысячных.

При записи десятичной дроби ученик должен прежде всего сообразить, какие доли содержит дробь. Пусть, например, надо записать 8 целых и 75 тысячных. После запятой в записи дроби должны стоять три цифры, при этом десятых долей нет; поэтому пишем 8,075.

Десятичная дробь, как средство преобразования именованных чисел. Десятичная дробь служит средством для преобразования составного именованного числа в простое с высшими мерами. Этим достигается упрощение числа. Например, рост ученика равен 1 *м* 2 *дм* 5 *см*. Надо превратить меры этого числа в метры.

1 *м* 2 *дм* 5 *см* = 1 *м* 2 десятым метра и 5 сотым метра = 1,25 *м*. Точно также 1 р. 25 к. = 1 р. 25 сотым рубля = 1,25 р. или 1 *кг* 25 *г* = 1 *кг* 25 тысячным килограмма = 1,025 *кг*.

Может потребоваться и обратная операция — преобразование простого дробного именованного числа в составное, например 3,25 руб. = 3 руб. 25 коп.; 2,05 *м* = 2 *м* 5 *см*.

Преобразование десятичных дробей. Преобразование десятичной дроби в десятичную же может быть двоякого рода: замена долей более мелкими или *раздробление* и замена долей более крупными или *превращение*.

Раздробить устно одну или несколько десятых в сотые и тысячные дети уже умеют. Они знают, что 1 десятая составляет 10 сотых или 100 тысячных, что 3 десятых составляют 30 сотых или 300 тысячных и т. д. Но надо еще научиться писать такие числа, как 10 сотых, 30 сотых и т. д.

Чтобы записать 10 сотых, рассуждаем так: 10 сотых составляют 1 десятую, т. е. 0,1. Если бы в этом числе были еще сотые доли, их пришлось бы записать на втором месте справа от запятой. В этом числе таких долей нет. Поэтому на втором месте справа от запятой пишем нуль. Итак, 0,1 = 0,10, т. е. 1 десятая равна 10 сотым.

Рассуждая таким же образом, найдем, что 0,3 = 0,30; 0,5 = 0,50, 0,3 = 0,300; 0,5 = 0,500; и т. д.

Вслед за более легкими упражнениями в раздроблении надо давать и более трудные примеры. Пусть надо 1,2 раздробить в сотые доли; 3,5 — в тысячные. Получим: 1,2 = 1,20; 3,5 = 3, 500 и т.д. Чтобы учащиеся яснее представляли себе сущность такого преобразования и с большей легкостью воспроизводили соответствующие рассуждения, следует отвлеченным примерам предпосылать раздробление выраженных дробью именованных чисел, например долей метра, килограмма и др.

Превратить устно 40 сотых в десятые, 500 тысячных в сотые и в десятые и т. д. дети уже умеют. Записывать такие числа, как 40 сотых, 500 тысячных, они только что научились. Поэтому они без труда поймут, что 0,40 = 0,4; 0,700 = 0,70 = 0,7 и т. д.

После достаточного количества таких и более трудных упражнений (например: 4,270 = 4,27; 2,400 = 2,4 и т. д.) дети сумеют сделать следующие выводы: 1) величина десятичной дроби не изменится, если приписать к дроби справа нули или их откинуть; 2) приписывая к десятичной дроби справа нули, мы заменяем доли более мелкими, иначе говоря, раздробляем десятые в сотые и тысячные, сотые в тысячные и т. д.; наоборот, отбрасывая нули, мы заменяем доли более крупными, иначе говоря, превращаем сотые в десятые, тысячные в сотые и в десятые и т. д.

Сравнение десятичных дробей по величине. Преобразование десятичных дробей будет встречаться в курсе дробей неоднократно. Прежде всего оно необходимо для сравнения десятичных дробей. Сравним, например, числа 3,4 и 3,375. Какое из них больше? Второе число задано в тысячных долях. Раздробим в тысячные доли и первое число: 3,4 = 3,400. Сравнивая числа 3,400 и 3,375, мы видим, что 3,400 больше, чем 3,375.

Заключение. Начинающему преподавателю может казаться, что такие понятия, как образование десятичной дроби, ее запись, преобразование — простые понятия, которые можно пройти наспех, механически, что эти понятия усваиваются сами собою. Этот взгляд ошибочный. От большего или меньшего понимания десятичной дроби зависит успех или неуспех усвоения действий над десятичными дробями. Вот почему эти основные, первоначальные понятия надо пройти по возможности неторопливо и внимательно.

Сложение и вычитание десятичных дробей.

Общие замечания. Сложение и вычитание десятичных дробей выполняется так же, как сложение и вычитание целых чисел. Но это не значит, что эти действия дети могут усвоить автоматически, без каких либо пояснений, вне всякой последовательности. Упражнения надо начинать с простейших устных примеров, которые служат своего рода связующим звеном между сложением и вычитанием целых чисел и десятичных дробей. На этих устных упражнениях дети уясняют себе, что при сложении и вычитании десятичных дробей они производят эти действия над разрядными слагаемыми дробей, подобно тому, как это было при сложении и вычитании целых чисел. Они научаются относить десятые к десятым, сотые к сотым совершенно так же, как до сих пор они относили единицы к единицам и десятки к десяткам. Они привыкают, в случае надобности, превращать единицы низшего разряда в единицы высшего (при сложении) и раздроблять единицы высшего разряда в единицы низшего (при вычитании). В процессе устных вычислений дети должны ясно представлять себе состав десятичной дроби и соотношение между ее разрядными единицами. Только на основе таких упражнений можно затем добиться сознательного выполнения учащимися письменного сложения и вычитания десятичных дробей.

Устное сложение и вычитание десятичных дробей. Упражнения в устном сложении и вычитании десятичных дробей можно разбить на две группы:

1. С л о ж е н и е о д н о з н а ч н ы х ч и с е л с о д н о з н а ч н ы м и и с о о т в е т с т в у ю щ и е с л у ч а и в ы ч и т а н и я. Вот образцы примеров этого рода, расположенные в порядке возрастающей трудности:

а)	0,3 + 0,5	б)	0,7 – 0,3	в)	0,04 + 0,03	г)	0,08 – 0,06
	0,7 + 0,3		1 – 0,6		0,08 + 0,02		0,1 – 0,05
	0,8 + 0,5		1,2 – 0,7		0,06 + 0,09		0,15 – 0,08

Складывая числа 0,8 и 0,5, дети рассуждают следующим образом: 8 десятых да 5 десятых — 13 десятых, 13 десятых — это 10 десятых, т. е. целая единица и еще 3 десятых. Значит получится всего 1 целая и 3 десятых.

При вычитании дети рассуждают так: чтобы от 1,2 отнять 0,7, раздробим 1,2 в десятые. В целой единице 10 десятых, да 2 десятых — всего 12 десятых. От 12 десятых отнять 7 десятых, получится 5 десятых. Можно поступить иначе: отнимем от 1,2 сначала 2 десятых, а затем от целой единицы еще 5 десятых — останется 0,5.

2. Сложение двузначных чисел с однозначными и соответствующие случаи вычитания. Вот образцы примеров этого рода, расположенные в порядке возрастающей трудности:

а)	1,4 + 0,3	б)	1,8 – 0,5	в)	0,15 + 0,04	г)	0,46 – 0,02
	1,8 + 0,2		2 – 0,7		0,27 + 0,3		0,57 – 0,4
	1,7 + 0,5		3,5 – 0,8		0,38 + 0,06		0,62 – 0,08

Примеры более трудные, например, на сложение и вычитание двузначных чисел, не говоря уже о трехзначных, были бы обременительны для устных вычислений — их можно решать письменно.

Письменное сложение и вычитание десятичных дробей. Упражнения в письменном сложении и вычитании десятичных дробей можно тоже разделить на две группы, но по иному признаку, чем устные упражнения. К первой группе мы отнесем те упражнения, когда слагаемые и сумма, уменьшаемое и вычитаемое не имеют целых единиц. Ко второй группе отнесем сложение и вычитание смешанных чисел. Рассмотрим каждую группу отдельно.

В первой группе мы различаем два рода случаев:

1. Слагаемые, уменьшаемое и вычитаемое имеют одинаковое число знаков. Вот образцы примеров этого рода, расположенные в порядке возрастающей трудности:

а) 0,26 + 0,43	б) 0,75 – 0,23	в) 0,123 + 0,242	г) 0,358 – 0,235
0,47 + 0,53	0,63 – 0,26	0,266 + 0,234	0,561 – 0,285
0,85 + 0,76	0,92 – 0,84	0,374 + 0,269	0,702 – 0,297

2. Слагаемые, уменьшаемое и вычитаемое имеют неодинаковое число знаков. Вот образцы примеров этого рода:

а)	0,4 + 0,364	б)	0,48 + 0,256	в)	0,807 + 0,5
	0,06 + 0,059		0,341 + 0,07		0,63 + 0,079
	0,86 – 0,359		0,248 – 0,06		0,27 – 0,008
	0,568 – 0,29		0,163 – 0,09		0,6 – 0,385

Ко второй группе, как уже сказано, относятся примеры на сложение и вычитание смешанных чисел. Вот образцы примеров этого рода:

а)	0,84 + 0,25	б)	2,3 – 0,75	в)	1,25 – 0,86
	1,45 + 0,83		2,9 – 0,375		1,8 – 0,372
	2,706 + 1,74		3,2 – 1,45		3,257 – 2,9
	1,734 + 0,266		2,27 – 1,068		2,4 – 1,268

Производя письменное сложение и вычитание, ученик должен рассуждать. В противном случае он может легко впасть в ошибку. Например, вычитая 2,3 из 7,85 механически, не рассуждая, ученики иногда отнимают 3 от 5.

Сложим два числа 0,395 и 4,87 письменно. Прежде всего надо записать числа „в столбик“. Первое слагаемое состоит из 3 десятых, 9 сотых и 5 тысячных, второе из 4 единиц, 8 десятых и 7 сотых. Подпишем одно число под другим так, чтобы единицы стояли под единицами, десятые под десятыми и т. д. Затем складываем, начиная с самых мелких долей.

$$\begin{array}{r} 0{,}395 \\ +\ \underline{4{,}87} \\ 5{,}265 \end{array}$$

Вычтем 2,8 из 11,325. Подпишем одно число под другим по такому же правилу, как и при сложении чисел.

$$\begin{array}{r} 11{,}325 \\ -\ \underline{2{,}8} \\ 8{,}525 \end{array}$$

Из 5 тысячных и 2 сотых мы ничего не вычитаем. Пишем эти числа. Из 3 десятых нельзя вычесть 8 десятых, поэтому берем от единиц одну единицу и раздробляем ее в десятые доли и т. д.

Умножение и деление десятичных дробей на целое число.

Умножение и деление десятичных дробей на целое число, как понятия, не заключают логических трудностей, так как эти действия можно понимать в привычном для учащихся смысле. Так, умножить дробь 0,27 на 8 — это то же, что 0,27 взять 8 раз; а деление 0,27 на 2 можно толковать, как деление на две равные части.

Эти же действия не представляют и вычислительных трудностей, так как они весьма сходны с умножением и делением целых чисел. Умножение десятичной дроби на целое число приводится к умножению разрядных чисел того или другого числа, а деление десятичной дроби на целое число — к разложению дроби на такие слагаемые, при делении которых на целое число получаются разрядные числа частного.

Сходство арифметических действий над десятичными дробями и над целыми числами обусловливается сходством нумерации тех и других чисел. Однако в действиях над этими числами существуют и различия, которые опять таки объясняются отличиями их нумераций. Например, умножая дробь 4,35 на 10, мы переносим запятую вправо на одну цифру, потому что от этого значение каждой цифры дроби возрастает в 10 раз. При умножении же 435 на 10, мы приписываем к этому числу справа нуль; от этого значение каждой цифры числа 435 также возрастает в 10 раз.

Умножение и деление десятичных дробей мы будем начинать с устных примеров, которые должны содействовать пониманию письменного умножения и деления. По-

этому при подборе устных примеров мы будем уделять главное внимание умножению разрядных чисел и делению, при котором в частном получается разрядное число.

Материал расположим в такой последовательности:

а) Умножение десятичной дроби на 10 и на 100.

б) Деление десятичной дроби на 10 и на 100.

в) Устное умножение десятичной дроби на целое число.

г) Письменное умножение десятичной дроби на целое число.

д) Устное деление десятичной дроби на целое число.

е) Письменное деление десятичной дроби на целое число.

Умножение десятичной дроби на 10 и на 100. При умножении десятичной дроби на 10, каждое разрядное число этой дроби увеличивается в 10 раз. Например: 3,245 · 10 = 32,45. Поэтому урок умножения десятичной дроби на 10 начнем с умножения на 10 десятичных дробей, содержащих одну значащую цифру:[1]

0,1 · 10	0,01 · 10	0,001 · 10
0,2 · 10	0,05 · 10	0,003 · 10
0,8 · 10	0,07 · 10	0,008 · 10

Эти умножения выполняются на основании соотношения между десятичными долями (стр. 388).

Далее переходим к умножению на 10 десятичных дробей, содержащих две значащие цифры:

3,2 · 10 0,27 · 10 0,045 · 10.

При этом рассуждать будем так. Число 3,2 состоит из 3 единиц и 2 десятых. Умножив 3 на 10, получим 3 десятка; умножив 2 десятых на 10, получим 2 единицы, а всего — 32.

Далее умножаем на 10 десятичные дроби, содержащие три значащие цифры и более, рассуждая так же, как в предыдущем случае. Выведем правило: чтобы умножить десятичную дробь на 10, достаточно передвинуть запятую вправо через одну цифру.

В таком же порядке будем проходить и умножение десятичной дроби на 100.

Применение правил умножения десятичной дроби на 10 и на 100 вызывает в некоторых случаях затруднение, которое надо предупредить. Представим эти случаи на примерах:

13,7 · 10	2,75 · 100	0,27 · 100	0,008 · 100
0,75 · 10	13,7 · 100	0,028 · 100	0,005 · 10.

Решая эти примеры по правилам, надо сказать, как „передвигать“ запятую и какие результаты должны получиться.

Деление целого числа и десятичной дроби на 10 и на 100. При делении целого числа или десятичной дроби на 10, каждое разрядное число делимого уменьшается в 10 раз. Например, 345 : 10 = 34,5 или 2,37 : 10 = 0,237. Из этого видно, что деление числа на 10 приводится к делению на 10 его разрядных чисел. Поэтому начнем с деления на 10 чисел, заключающих одну значащую цифру:

1 : 10	0,1 : 10	0,01 : 10
3 : 10	0,5 : 10	0,08 : 10

Деление выполняем так: делим 0,5 на 10, получим 0,05, потому что 0,05 × 10 = 0,5.

[1] Значащими мы будем считать все цифры дроби за исключением нулей в начале и в конце дроби.

Решив ряд таких примеров, перейдем к делению на 10 чисел, заключающих две значащие цифры и т. д. Деля 35,87 на 10, ученик рассуждает так:

В числе: 35,87 — 3 десятка, 5 единиц, 8 десятых и 7 сотых. Чтобы разделить 35,87 на 10, разделим 3 десятка на 10, получим 3 единицы; разделив 5 единиц на 10, получим 5 десятых и т. д., всего получим 3,587.

Решив большое число примеров, сделаем вывод: чтобы разделить целое число на 10, надо отделить в нем запятой справа одну цифру.

Чтобы разделить десятичную дробь на 10, достаточно передвинуть запятую влево через одну цифру.

В том же порядке пройдем деление целого числа или десятичной дроби на 100.

Затруднения, которые встречаются при пользовании правилами деления на 10 и на 100, предупредим, если решим с учениками по этим правилам ряд примеров, подобных следующим:

370 : 100	3,7 : 10	0,48 : 10	0,05 : 10
285 : 10	25,3 : 100	5,8 : 100	0,3 :100.

Правила умножения и деления на 10 и на 100 учащиеся часто смешивают. Смешение двух понятий, имеющих в каком-нибудь отношении сходство, явление обычное. Для предупреждения его, надо два сходных понятия сопоставить и найти разумное основание для их различения. Сделаем умножение и деление:

$$13{,}75 \cdot 10 = 137{,}5$$
$$13{,}75 : 10 = 1{,}375.$$

В первом примере мы перенесли запятую вправо и этим каждое разрядное число, а следовательно и всю дробь увеличили. Во втором примере мы перенесли запятую влево и этим достигли обратного, т. е. — дробь уменьшили.

Устное умножение десятичной дроби на целое число. Выполнять умножение в уме мы будем в следующих случаях:

а) Умножение десятичной дроби на однозначное целое число, когда дробь заключает одну значащую цифру.

б) Умножение десятичной дроби на однозначное число, когда дробь заключает две значащие цифры и произведение не более двух значащих цифр.

в) Умножение десятичной дроби на двузначное число, когда дробь имеет только одну значащую цифру, а произведение не более двух значащих цифр.

Упражнения можно предлагать в такой последовательности:

0,1 · 3	0,01 · 5	0,001 · 4
0,2 · 4	0,03 · 2	0,004 · 2
0,8 · 4	0,08 · 4	0,004 · 3
0,6 · 5	0,06 · 5	0,008 · 5.

3,4 · 2	0,23 · 3	0,024 · 2	0,3 · 20;	0,4 · 16
1,2 · 5	0,35 · 2	0,035 · 2	0,07 · 30;	0,03 · 25
2,4 · 3	0,25 · 4	0,025 · 8	0,005 · 40;	0,003 · 15.

Приемы вычисления покажем на примерах. Умножим 0,8 на 7. Для этого по 8 десятых возьмем 7 раз, получим 56 десятых или 5,6. Поэтому 0,8 · 7 = 5,6.

1,2 умножим на 5. Преобразуем число 1,2 в десятые доли, получим 12 десятых. Умножив 12 десятых на 5, получим 60 десятых или 6 единиц. Запись: 1,2 · 5 = 6.

Письменное умножение десятичной дроби на целое число. Умножение десятичной дроби на целое число выполняется аналогично умножению составного именованного числа на отвлеченное. Поэтому следует эти два случая умножения сопоставить:

3 *м* 75 *см*	3,75
× 18	× 18
3000	3000
375	375
6750 *см* = 67 *м* 5 *дм*	67,50 = 67,5

Умножим 3 *м* 75 *см* на 18. Для этого умножим 375 *см* на 18. Получим 6750 см, или 67 *м* 5 *дм*.

Умножим 3,75 на 18. Раздробим число 3,75 в сотые доли: 3,75 = 375 сотым. Умножим 375 сотых на 18, получим 6750 сотых или 67,50 или 67,5.

Сделав ряд упражнений, можем вывести правило: чтобы умножить десятичную дробь на целое число, надо перемножить оба числа, как целые, и в произведении отделить справа запятой столько цифр, сколько их во множимом.

Упражнения следует расположить в такой последовательности:

а) Умножение десятичной дроби на однозначное число (3,7 · 5; 3,8 · 5; 0,37 · 5; 0,35 · 6; 0,75 · 8; 0,084 · 3; 0,085 · 4; 0,025 · 8; 1,37 · 3; 3,45 · 8; 4,25 · 8; 3,26 · 8; 0,725 · 4; 0,125 · 8).

б) Умножение десятичной дроби на многозначное число (3,7 · 16; 4,5 · 25; 0,027 · 35; 0,045 · 28; 2,05 · 16; 3,07 · 25; 0,225 · 24; 0,305 · 16; 3,5 · 248; 2,6 · 205; 0,8 · 375).

Устное деление целого числа или десятичной дроби на целое число. Будем считать следующие случаи деления целого числа или десятичной дроби на целое число удобными для устного вычисления:

а) Делитель — однозначное число; делимое и частное заключают каждое не более двух значащих цифр.

б) Делитель — двузначное число; частное заключает одну значащую цифру.

Упражнения можно предлагать в такой последовательности:

0,3 : 3	0,09 : 3	3 : 6
0,04 : 4	0,12 : 6	3,2 : 8
0,8 : 2	0,024 : 4	0,3 : 5
6,9 : 3	0,72 : 3	0,05 : 2
0,84 : 4	0,072 : 6	6 : 5
0,048 : 4	0,7 : 2	7,2 : 4
0,75 :25	6 : 20	0,2 : 40
0,075 : 15	6,4 : 16	0,24 : 80

Для примера сделаем деление 0,3 на 5. Получатся ли в частном десятые доли?

Чтобы узнать, сколько получится сотых, раздробим 3 десятых в сотые: 0,3 = 0,30. Разделив 30 сотых на 5, получим 6 сотых. Поэтому 0,3 : 5 = 0,06. Проверить.

Письменное деление целого числа или десятичной дроби на целое число. Письменное деление десятичной дроби на целое число выполняется по тем же правилам, как и деление целого числа на целое. Для примера разделим 5,6 на 16. В частном единиц не получится. Пишем на месте единиц 0. Раздробим 5 единиц в десятые доли, получим 50 десятых, да 6 десятых — 56 десятых, разделим 56 десятых на 16, получим

3 десятых в частном и 8 десятых в остатке, которые записываем; 8 десятых раздробляем в сотые и т. д.

```
5,6 : 16
4,8   0,35
  80
  80
  „
```

Последовательность упражнений:

а) Делитель однозначное число (8,4 : 2; 0,369 : 3; 6,92 : 2; 9,24 : 4; 25,2 : 8; 3,15 : 9; 0,245 : 7; 9 : 4; 8,24 : 8; 120,3 : 6).

б) Делитель многозначное число (33,6 : 48; 2,76 : 46; 114,4 : 26; 7,28 : 52; 12 : 48; 49,68 : 46; 26 :25; 8,36 : 152; и т. д.).

Проценты.

Сведения о процентах в курсе арифметики на четвертом году. В учении о процентах решаются три задачи:

1. Узнать часть числа, выраженную в процентах.
2. Узнать число по данной его части, выраженной в процентах.
3. Узнать отношение двух чисел, выраженное в процентах.

На четвертом году учащимся доступна только первая из указанных задач.

Таким образом из учения о процентах на четвертом году детям сообщается следующее:

1. Понятие о проценте.
2. Вычисление одного процента от целого числа, состоящего из круглых сотен.
3. Вычисление нескольких процентов от целого числа, состоящего из круглых сотен.

Понятие процента. Один процент числа есть одна сотая часть этого числа. Понятия процента и сотой доли числа — тождественны. А так как ученики имеют довольно отчетливое представление о сотой части единицы, то остается только закрепить за этим представлением слово, приучить учеников правильно понимать это слово и свободно пользоваться им в речи. Дадим задачу:

На гектаре столетнего леса растет 600 деревьев. Сосны составляют одну сотую часть этого числа. Сколько сосен на гектаре?

Чтобы узнать число сосен, надо 600 разделить на 100, получим 6.

6 — одна сотая часть числа 600
6 — один процент числа 600

Давая учащимся задачи и примеры на вычисление одного процента от числа, следует почаще ставить перед ними такие вопросы: что такое процент? Что значит вычислить один процент от такого-то числа? Как это сделать?

Вычисление нескольких процентов от числа. Прежде чем переходить к вычислению нескольких процентов от числа, полезно напомнить детям способ нахождения части предмета (например, круга, квадрата) и числа. Как найти $\frac{3}{8}$ круга? $\frac{5}{8}$ круга? $\frac{3}{8}$ числа 24? $\frac{5}{8}$ числа 40? и т. д.

Затем можно предложить детям геометрическую задачу:

Начертить квадрат, сторона которого 10 *см*. Найти 1%, 16%, 40% площади этого квадрата.

Решая эту задачу, познакомим детей с записью слова *процент*.

Решим еще задачу:

В совхозе засеяли 1800 *га*. 16% этой земли засеяли овсом, а 40% — пшеницей. Сколько гектаров земли засеяли овсом и сколько пшеницей?

1. Узнаем 1% числа 1800. Так как 1% есть одна сотая часть числа, то надо 1800 разделить на 100.

1800 *га* : 100 = 18 *га*.

2. Узнаем 16% земли. Так как 1% земли составляет 18 *га*, то, чтобы узнать 10% ее, надо 18 умножить на 16.

Запись в тетради можно расположить таким образом:

1. Найдем 1% числа 1800 *га*. 1800 *га*: 100 = 18 *га,*

2. Найдем 16% числа 1800 *га*.

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 18\ \textit{га} \\ 16 \end{array} \\ \hline 108 \\ 18 \\ \hline 288\ \textit{га} \end{array}$$

К концу года можно приучить детей записывать ход решения в виде формулы:

$$(1800 : 100) \cdot 16 = 288$$

Выражение числа процентов в долях единицы. Рассмотрим квадрат, сторона которого равна 10 *см*, как образ единицы. Разделим его на 100 квадратных клеток. Тогда каждая клетка составит 1% квадрата. Можно усмотреть, что

$$10\% = \frac{1}{10} \qquad 50\% = \frac{1}{2}$$

$$20\% = \frac{1}{5} \qquad 75\% = \frac{3}{4}$$

$$25\% = \frac{1}{4} \qquad 100\% = 1$$

Такая замена числа процентов долями единицы сокращает вычисления.

Покажем это на примере. Найдем 25% числа 3600.

Первый способ:	*Второй способ:*
1) 3600 : 100 = 36	$25\% = \frac{1}{4}$
2) 36 · 25 = 900	3600 : 4 = 900.

ИЗМЕРЕНИЕ И ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ.

Если на третьем году основной фигурой в отделе геометрии был прямоугольник, то на четвертом году таковой является прямоугольный параллелепипед. Понятия, необходимые для изучения параллелепипеда, пройдены на третьем году. Таковы — плоскость, прямая линия, прямой угол, прямоугольник, площадь прямоугольника. Эти понятия должны быть, очевидно, на четвертом году повторены.

Важнейшую часть геометрического отдела четвертого года составляет измерение прямоугольного параллелепипеда, т. е. измерение его ребер с последующим вычислением поверхности и объема параллелепипеда. Для измерения объема параллелепипеда необходимо познакомить учащихся с кубом.

В курс четвертого года входят измерения на местности: съемка плана небольшого участка земли, имеющего форму прямоугольника или многоугольника с прямыми (внешними или внутренними) углами, и измерение площади таких же фигур.

На четвертом году полагается еще по программе пройти окружность и круговые диаграммы.

Расположим теперь весь этот геометрический материал в той последовательности, в какой он будет прорабатываться.

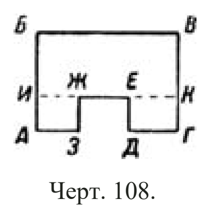
1. Измерение на местности.
2. Повторение понятий — плоскости, прямой линии, угла, прямоугольника, квадрата.
3. Развертка поверхности куба.
4. Повторение площади прямоугольника, измерение поверхности куба.
5. Развертка прямоугольного параллелепипеда.
6. Измерение объема прямоугольного параллелепипеда и куба.
7. Кубические меры.
8. Задачи на объем прямоугольного параллелепипеда.
9. Раздробление и превращение именованных чисел, содержащих кубические меры.
10. Окружность и круговые диаграммы.
11. Измерение на местности (те же виды измерения, какие встречались раньше, но усложненные).

Работы на местности.

Осенние работы на местности. На четвертом году обучения осенью могут быть выполнены следующие работы на местности: 1) Измерение сторон и вычисление площади участка земли, имеющего форму многоугольника с прямыми углами. 2) Построение квадрата или прямоугольника, имеющего данную площадь.

1. Первая работа представляет собой повторение работы, которая уже была описана в отделе третьего года (стр. 339). На четвертом году можно выбрать фигуру несколько более сложную, чем на третьем году. Работа эта производится так:

Сперва надо выбрать весьма небольшой участок земли, представляющий собой многоугольник, у которого все углы изнутри или извне прямые, как на чертеже. Так как найти такую фигуру на земле нелегко, то придется какую-либо имеющуюся фигуру дополнить или наоборот сократить, пользуясь для этого вехами, которыми отмечаются вершины многоугольника. Перед измерением надо сделать от руки набросок фигуры в тетради для того, чтобы на нем отмечать полученные при измерении числа. Затем все стороны измеряют мерной веревкой, полученные числа записывают и производят вычисление. Для примера вычислим площадь фигуры, изображенной на чертеже 108. Стороны фигуры равны:



Черт. 108.

АБ = 28 *м*	*АЗ* = 12 *м*	*ЗЖ* = 8 *м*
ВГ = 28 *м*	*ЖЕ* = 15 *м*	*ДЕ* = 8 *м*
БВ = 40 *м*	*ДГ* = 13 *м*	

Вычислить площадь фигуры можно двумя способами, складывая или вычитая площади: в первом случае фигуру делят на прямоугольники, например, *АИЖЗ, ДЕКГ* и *ИБВК*; во втором случае фигуру дополняют до прямоугольника *АБВГ*. Второй способ вычисления площади многоугольника, изображенного на черт. 108, проще, чем первый: он заключается в том, что вычисляют площадь прямоугольника *АБВГ* и затем от нее отнимают площадь прямоугольника *ЗЖЕД*. Вычислим эти площади:

пл. *АБВГ*

$$\frac{28 \text{ кв. } м \times 40}{1120 \text{ кв. } м}$$

пл. *ЗЖЕД*

$$15 \text{ кв. } м \times 8 = 120 \text{ кв. } м$$

$$1120 \text{ кв. } м - 120 \text{ кв. } м = 1000 \text{ кв. } м$$

Итак, площадь искомой фигуры 1000 кв. *м*. Мы взяли все стороны многоугольника в целых метрах. Этого при измерении может и не быть. Тогда можно округлить полученные числа до целых метров.

2. Перейдем ко второй работе: построить на открытом месте прямоугольник, площадь которого равна 2400 кв. *м.* Сперва надо вычислить стороны такого прямоугольника. Эта задача — неопределенная: таких прямоугольников может быть много. Допустим, что длина прямоугольника 60 *м*. Как найти ширину? Чтобы вычислить площадь прямоугольника, длину его умножают на ширину.

Запишем:

длину × ширину = площадь.

Длина прямоугольника 60 *м*, площадь 2400 кв. *м.*

Запишем:

60 × ширину = 2400.

На какое число надо умножить 60, чтобы получить 2400? Чтобы узнать это число, надо 2400 разделить на 60, получится 40. Проверим: если длина прямоугольника 60 *м*, а ширина 40 *м*, то площадь будет 60 кв. *м* × 40 = = 2400 кв. *м.*

Будем выбирать по нашему желанию одну сторону прямоугольника, а другую будем вычислять.

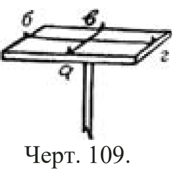
Одна сторона прямоугольника 80 *м*, площадь 2400 кв. *м*: какова должна быть другая сторона?

Одна сторона прямоугольника 75 *м*, площадь 2400 кв. *м*: какова у него другая сторона? И т. д.

Выпишем теперь стороны прямоугольников, площади которых равны 2400 кв. *м*: 60 *м* и 40 *м*, 80 *м* и 30 *м*, 75 *м* и 32 *м*, 96 *м* и 25 *м*.

Построим на местности эти прямоугольники. Чтобы построить на местности прямоугольник, надо уметь строить прямой угол.

Построение прямого угла на местности. Прямые углы на местности строятся с помощью прибора, который называется *эккером*. Простейшее его устройство таково:



Черт. 109.

На квадратном куске бумаги, сторона которого имеет около 20 *см*, начерчены две перпендикулярные прямые. Этот кусок бумаги прикрепляют кнопками к планшетке, сделанной из дерева или картона и привинченной к концу палки, другой конец которой заострен. У концов перпендикулярных прямых *а, б, в* и *г* воткнуты четыре булавки. Палка заостренным концом втыкается в землю.

Установив эккер, воткнем шагах в 30 от него веху. Поворачивая его в одну и в другую сторону и держа глаз перед булавкой *а*, несколько поодаль от нее, добьемся такого его положения, при котором булавка *а* будет покрывать булавку в и веху.

Когда эта установка сделана, то надо поставить другую веху на прямой, проходящей через булавки *б* и *г*. Это делает помощник, в то время как наблю-

датель смотрит на булавки и на веху и рукой подает знак, в какую сторону продвинуть веху. Когда обе вехи установлены, то эккер вынимают и на его место ставят веху. Эти три вехи определяют прямой угол.

Построение прямоугольника на местности. Построим на местности прямоугольник, стороны которого 60 м и 40 м. Выберем удобное для этого открытое место и отмерим прямую линию длиной в 60 м. У ее концов с помощью эккера построим прямые углы. На их сторонах отмерим расстояния в 40 *м*. Мы получим четыре вершины прямоугольника, отмеченные на земле вехами.

Группы учеников этим же способом строят прямоугольники со сторонами 80 *м* и 30 *м*, 72 *м* и 35 *м*. Каждый из этих прямоугольников будет иметь площадь 2400 кв. *м* (около $\frac{1}{4}$ *га*).

Куб и прямоугольный параллелепипед.

Куб. Перед тем как приступить к описанию куба, надо возобновить в памяти учащихся понятия плоскости, прямой линии, угла, прямоугольника и квадрата, пройденные на третьем году.

Имея перед собой несколько моделей куба — из дерева и из бумаги, приступаем к изучению формы куба. Чтобы изготовить куб из бумаги или слепить его из глины, надо познакомиться с его формой.

У куба *6 граней*: верхняя, нижняя, передняя, задняя, левая, правая. Верхняя и нижняя грани не сходятся и не расходятся, всюду лежат друг от друга на равном расстоянии (параллельные плоскости). То же надо сказать о передней и задней грани, о левой и правой грани. Нижняя грань называется *основанием* куба.

Найдем у куба грани, которые встречаются: например, нижнюю грань и боковую. Эти две грани *пересекаются*. Место, в котором они встречаются, называется *ребром*. Ребро куба — прямая линия. У куба —*12 ребер*. Показать их в определенном порядке.

Нижняя и боковая грани куба образуют внутри куба угол—· прямой угол. То же мы наблюдаем и в классе. Плоскости стен составляют прямые углы с плоскостью пола и с плоскостью потолка. Показать грани угла, его ребра.

Наблюдаем еще те места куба, в которых сходятся или пересекаются три его грани или 3 ребра. Это — *вершины* куба, их у куба *восемь*.

Подведем итоги описания куба:

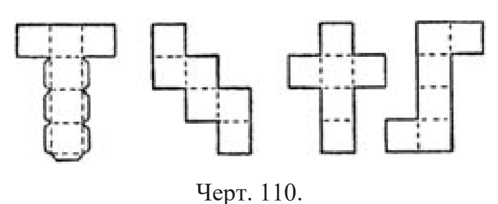
У куба — 6 граней. Все его грани — равные между собой квадраты. Те грани куба, которые пересекаются, образуют прямые углы. У куба — 12 ребер и 8 вершин.

Развертка куба. Чтобы приготовить куб из бумаги, надо вырезать его развертку. Приготовление развертки — работа, ценная для развития пространственного воображения.

Разрежем поверхность склеенного из бумаги куба так, чтобы ее можно было развернуть: разрежем его по трем ребрам, тогда одна грань его отогнется; то же сделаем с противоположной гранью; прочие четыре грани еще будут скреплены. Разрежем оставшуюся часть поверхности куба вдоль любого ребра: получим развертку в виде креста; или буквы Т. Существуют и другие виды разверток (черт. 110).

Полезно будет, чтобы учащиеся начертили несколько разверток куба по воображению, на-глазомер. Вырезав эти развертки, проверяют их, пробуя составить из них куб.

После этих предварительных упражнений учащиеся вычерчивают на плотной бумаге возможно точнее развертку из 6 квадратов, сторона каждого квадрата 5 *см*, и затем ее вырезывают. Чтобы ребра куба при сгибании получились возможно отчетливее, удобно в местах сгибов развертки сделать на ней каким-либо острием царапины.



Черт. 110.

Чтобы склеить куб, необходимо в развертке его оставить „запасы“, отмеченные на первой фигуре чертежа 110. Склеить куб можно столярным клеем или хорошим жидким клеем, существующим в продаже.

Если хорошего клея не найдется, то можно ограничиться изготовлением развертки поверхности куба, но уже без запасов для склеивания.

Прямоугольный параллелепипед. Форму прямоугольного параллелепипеда изучают по тому же плану, по которому изучалась форма куба.

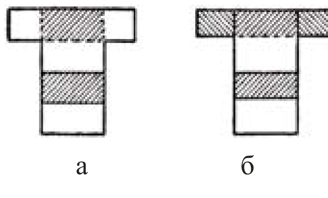
У прямоугольного параллелепипеда (или бруса) — шесть граней: все — прямоугольники, два из них могут быть квадратами. Противоположные грани равны.

Выберем две грани параллелепипеда, которые пересекаются: то место, где они сходятся, называется, как и у куба, ребром. Ребер у параллелепипеда 12.

Каждые две грани параллелепипеда, которые сходятся, составляют прямой угол, подобно тому, как в комнате — стена и пол или две смежные стены.

У прямоугольного параллелепипеда — 8 вершин. Полезно сравнить прямоугольный параллелепипед и куб с той целью, чтобы определить сходство и различие этих тел.

Развертка прямоугольного параллелепипеда. Поставим на стол ящик, имеющий форму параллелепипеда. У учащихся в руках могут быть спичечные коробки. Будем *мысленно* развертывать в некоторой последовательности поверхность прямоугольного параллелепипеда и в то же время чертить ее развертку. Предметы, например, спичечные коробки, будут служить пособиями, облегчающими работу воображения.



Черт. 111.

Следует начертить развертку двух видов прямоугольного параллелепипеда: такого, у которого все грани — прямоугольники (черт. 111, б) и такого, у которого две грани — квадраты (черт. 111, а).

Измерение поверхности прямоугольного параллелепипеда. Измерим сантиметровой линейкой длину, ширину и высоту какого-либо прямоугольного параллелепипеда. Вычислим его поверхность. Для этого следовало бы вычислить площадь каждой грани. Но у параллелепипеда противоположные грани равны. Поэтому потребуется вычисление площадей трех граней. Для учащихся вычисление будет яснее, если на доске будет изображена развертка поверхности и будут записаны размеры прямоугольников.

Вычислим поверхность параллелепипеда, у которого ребра равны 5 *см*, 3 *см* и 2 *см*. Вычислим площади граней, у которых ребра: 5 *см* и 3 *см*, 5 *см* и 2 *см*, 3 *см* и 2 *см*.

Пл. 1 грани	Пл. 2 грани	Пл. 3 грани
5 кв. *см* × 3 = 15 кв. *см*	5 кв. *см* × 2 = 10 кв. *см*	3 кв. *см* × 2 = 6 кв. *см*
Пл. 1 и 4 граней	Пл. 2 и 5 граней	Пл. 3 и 6 граней
15 кв. *см* × 2 = 30 кв. *см*	10 кв. *см* × 2 = 20 кв. *см*	6 кв. *см* × 2 = 12 кв. *см*

Поверхность параллелепипеда: 30 кв. *см* + 20 кв. *см* + 12 кв. *см* = 62 кв. *см*.

Задачи: 1) Вычислить поверхность всех четырех стен комнаты, поверхность ее пола и потолка, если длина комнаты — 6 *м*, ширина — 4 *м*, высота — 3 *м*.

2) Измерив длину, ширину и высоту класса в целых метрах, найти поверхность четырех его стен.

Понятие объема. Потребность измерения объема и необходимость особых мер объема можно обнаружить на примерах, взятых из жизни, как то: покупка дров, измерение молока, керосина, выкопанной земли и пр.

Выясним понятие объема, как величины. Для этого поставим рядом два неравных прямоугольных параллелепипеда — один прямоугольный параллелепипед меньше другого: *объем* одного параллелепипеда меньше объема другого.

Если же два прямоугольных параллелепипеда равны, то, говорят, объем одного из них равен объему другого.

Надо показать, что объем и вес не одно и то же. Стакан песку и стакан воды имеют один и тот же объем и разный вес. Когда отвешивают килограмм картофеля, то вес гири и вес картофеля один и тот же, а объемы различны.

Не следует смешивать объем и форму тела: литр воды может иметь разную форму в зависимости от того, в какой сосуд вода будет влита.

Измерение объема. Для выяснения понятия об измерении объема, надо иметь набор кубиков, по крайней мере, десятка четыре кубиков. Как классное пособие, кубики должны иметь длину ребра $2\frac{1}{2}$ – 4 *см*. Необходимо, чтобы фабрики, изготовляющие наглядные пособия, изготовляли наборы кубиков величиной в 1 куб. *см* для каждого ученика или, по крайней мере, по набору на двух. Такие наборы совершенно необходимы.

Чтобы измерение объема прямоугольного параллелепипеда было ученикам вполне понятно, надо дать им возможность наблюдать образование параллелепипеда из кубиков.

Сперва рассмотрим кубик, ребра которого равно 1 *см*. Объем его называют *кубическим сантиметром*.

Составим из кубиков, ребро которых равны каждое 1 *см* (в классном пособии может быть и больше), прямоугольный параллелепипед, длина которого 6 *см*, ширина 1 *см*, высота 1 *см*. Для этого надо взять 6 кубиков и их сдвинуть. Объем такого параллелепипеда равен 6 куб. *см*.

Сделаем еще несколько подобных упражнений.

Составим из тех же кубиков прямоугольный параллелепипед, длина которого 6 *см*, ширина 3 *см*, высота 1 *см*. Для этого соединим 6 кубиков в брусок, длина которого 6 *см*, ширина 1 *см*, высота 1 *см*. Так как ширина параллелепипеда должна быть 3 *см*, то таких брусков надо взять три и их сдвинуть.

Узнаем, сколько кубических сантиметров содержит параллелепипед.

6 куб. *см* · 3 = 18 куб. *см*.

Объем параллелепипеда равен 18 куб. *см*.

Сделаем еще несколько подобных упражнений.

Составим из кубиков прямоугольный параллелепипед, длина которого 6 *см*, ширина 3 *см* и высота 2 *см*. Если придется это делать перед классом, то кубики надо взять большие. Можно временно их рассматривать как „увеличенные“ кубические сантиметры.

Соединим 6 кубиков в брусок; длина бруска будет 6 *см*, ширина 1 *см* и высота 1 *см*. Так как ширина параллелепипеда 3 *см*, то таких брусков возьмем

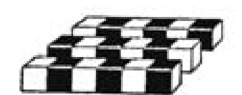
3 и сдвинем их вместе. Получим слой, длина, ширина и высота которого 6 *см*, 3 *см* и 1 *см*. А гак как высота параллелепипеда 2 *см*, то два таких слоя поместим один на другой и из них составим параллелепипед, длина, ширина и высота которого 6 *см*, 3 *см* и 2 *см*.

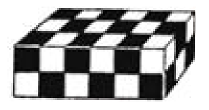
Сосчитаем, сколько кубических сантиметров в этом параллелепипеде.

Каков объем бруска?

Длина бруска — 6 *см*, поэтому его объем 6 куб. *см*.

Каков объем слоя?





Черт. 112.

Ширина слоя — 3 *см*, поэтому в слое заключается 3 бруска, объем каждого бруска — 6 куб. *см*. Чтобы узнать объем слоя, надо 6 куб. *см* умножить, на 3:

$$6 \text{ куб. } см \times 3 = 18 \text{ куб. } см.$$

Каков объем всего параллелепипеда?

Высота параллелепипеда 2 *см*, поэтому в параллелепипеде 2 слоя; объем каждого слоя 18 куб. *см*. Чтобы узнать объем параллелепипеда, надо 18 куб. *см* умножить на 2.

$$18 \text{ куб. } см \times 2 = 36 \text{ куб. } см.$$

Запишем короче:

$$6 \cdot 3 \cdot 2 = 36 \text{ (куб. } см).$$

Объем параллелепипеда 36 куб. *см*.

Составление параллелепипедов из кубиков дает возможность сравнивать их объемы. Так, поучительно сравнить объемы параллелепипедов, ребра которых 6 *см*, 3 *см*, 2 *см* и 9 *см*, 2 *см*, 2 *см*.

Упражнений в вычислении объема параллелепипеда надо произвести достаточно, чтобы образ бруса, разрезанного на кубики, и схема рассуждений сделались привычными.

Обращаем внимание учеников на те единицы длины, которыми измерялись ребра, и те единицы объема, в которых выражался объем.

Вычисляя объем, можно иллюстрировать рассуждения хорошим чертежем (черт. 112).

Переходим затем к вычислению объема параллелепипеда, не разделенного на кубики. Допустим, что надо измерить объем воздуха в комнате, длина, ширина и высота которой 5 *м*, 4 *м* и 3 *м*. Рассуждаем так, как если бы мы заполняли мысленно комнату кубами, величиной в 1 куб. *м* каждый.

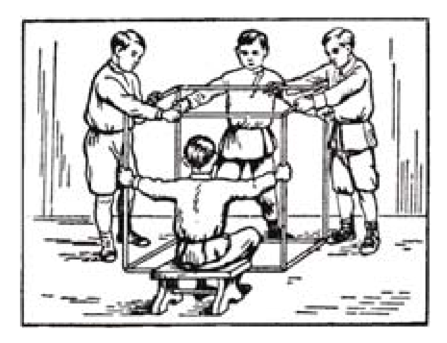
Необходимо предварительно создать образ такого куба. Учащиеся вырезывают 12 прутьев, длиной каждый в 1 *м*, и из них составляют скелет

кубического метра, как это показано на рис. 113. Кубический метр есть объем куба, ребро которого равно 1 *м*. Возвращаемся к вычислению объема комнаты. Так как длина ее 5 *м*, то по этой длине можно поставить 5 куб. *м*, из которых составится брус в 5 куб. *м*. Ширина комнаты 4 *м*, поэтому на полу можно уложить 4 таких бруса, получим слой. Высота комнаты 3 *м,* значит таких слоев поместится в ней 3. Чтобы узнать объем воздуха в комнате, надо 5 куб. *м* умножить на 4, а затем полученное число на 3.

5 куб. *м* × 4 = 20 куб. *м*

20 „ „ × 3 = 60 „ „ или 5 · 4 · 3 = 60 (куб. *м*).

Не выводя пока еще правила для вычисления объема параллелепипеда, предложим учащимся несколько задач на измерение и вычисление объема, которые они будут решать, пользуясь соображениями, основанными на делении прямоугольного параллелепипеда. Для упражнения в измерении объема параллелепипеда надо иметь несколько параллелепипедов из папки и дерева.



Черт. 113.

Правило для вычисления объема прямоугольного параллелепипеда можно вывести сперва в такой форме: Чтобы найти объем прямоугольного параллелепипеда, надо измерить длину, ширину и высоту его одной и той же единицей длины и полученные числа перемножить. Затем правило можно выразить покороче: чтобы вычислить объем прямоугольного параллелепипеда надо перемножить его длину, ширину и высоту. За выводом правила следует ряд задач, в которых объем вычисляется по правилу.

При вычислении объема возможна одна из следующих записей:

5 · 4 · 3 = 60 (куб. *м*)

5 куб. *м* · 4 · 3 = 60 куб. *м.*

5 *м* · 4 *м* · 3 *м* = 60 куб. *м*.

Наиболее пригодна — первая. Вторая запись неудобна, так как формулы не следует загромождать наименованием единиц. Третья преждевременна, так как учащиеся не имеют представления о действиях над единицами размерности; с точки же зрения определения умножения целых чисел такая запись не имеет смысла.

Точно так же вычисляется объем куба.

Единицы объема. У учеников должны выработаться отчетливые и привычные образы единиц объема или кубических мер.

Кубик, объем которого равен 1 куб. *см* ученик может слепить из глины. Куб, ребро которого равно 1 *дм*, можно образовать при помощи бумажной развертки, не тратя времени на склеивание его.

Куб, ребро которого равно 1 *м*, можно составить из прутьев. В продаже существуют модели кубического метра, в которых прутья скреплены с помощью кубиков у вершин куба.

Чтобы конкретизировать кубические меры, можно отмерить мензуркой 100 куб. *см* и 200 куб. *см* воды; отмерив с помощью литровой кружки литр воды, вымерить воду стаканами; показать литровую бутылку; показать сосуды вместимостью в 2 *л*, 3 *л*, 4 *л*. Небесполезно сообщить детям, что 1 куб. *м* воды равен приблизительно 2 сорокаведерным бочкам воды.

Вычислив, сколько кубических сантиметров в 1 куб. *дм* и сколько кубических дециметров в 1 куб. *м*, составим таблицу, в которой сопоставим меры длины, площади и объема: 1 *дм* = 10 *см*; 1 кв. *дм* = 100 кв. *см*; 1 куб. *дм* = = 1 000 куб. *см*. и т. д.

Не безинтересно для учащихся, что

1 кв. *м*	содержит	миллион	кв. *мм*
1 куб. *м*	„	миллион	куб. *см*
	или	миллиард	куб. *мм*

Задачи на вычисление объема прямоугольного параллелепипеда. Задачи эти могут быть двух родов: 1) задачи, в которых размеры параллелепипеда даны; 2) задачи, в которых надо измерить длину, ширину и высоту параллелепипеда и затем вычислить его объем.

1. Задачи на вычисление объема даются в такой последовательности:

а) Ребра параллелепипеда (или куба) выражены простыми именованными числами одного наименования (5 *м*, 4 *м* и 3 *м*).

б) Ребра параллелепипеда выражены простыми именованными числами с разными наименованиями (5 *дм*, 2 *см*, 2 *см*).

в) Ребра параллелепипеда или куба выражены составными именованными числами (1 *дм* 5 *см*, 1 *дм* 5 *см*, 8 *см*).

Во второй и третьей группах задач длина, ширина и высота параллелепипеда измерены разными мерами длины. Для вычисления же объема параллелепипеда ребра должны быть измерены одной мерой. Поэтому приступая к вычислению объема, надо сделать раздробление именованных чисел с той целью, чтобы они содержали одну и ту же меру длины. С подобным фактом ученики уже встречались при вычислении площадей.

2. При вычислении объема необходимы задачи, в которых требовалось бы измерить ребра параллелепипеда и затем вычислить его объем. Для таких

задач надо иметь набор картонных коробок, деревянных брусков, деревянных ящиков. Измерение ребер выполняется в круглых сантиметрах. Ученики об этом должны быть предупреждены: если при измерении ребра коробки сантиметрами получится остаток его, меньший половины сантиметра, то его вовсе считать не будем, если же он равен половине или больше половины сантиметра, то будем его считать за целый сантиметр. Это делаем мы затем, чтобы избежать измерения объема кубическими миллиметрами.

Кроме измерения объема параллелепипеда на небольших моделях, надо провести с учащимися измерение объема комнаты, точнее — объема воздуха в комнате. Мерами длины будут служить при этом метр и дециметр. При измерении длины, ширины и высоты, вообще говоря, получатся составные именованные числа, заключающие эти меры.

В качестве образчика для вычисления объема помещения сделаем задачу:

Длина класса 8 *м* 4 *дм*, ширина 6 *м* 5 *дм*, высота 4 *м*. Рассчитаем, достаточно ли помещение класса для 36 учеников, если на каждого ученика полагается объем 5 куб. *м*.

Каков объем помещения?

Раздробим именованные числа в дециметры:

8 *м* 4 *дм* = 84 *дм*,   6 *м* 5 *дм* = 65 *дм*,   4 *м* = 40 *дм*.

Перемножим числа 84, 65 и 40:

$$\begin{array}{r} \times\ 84\ \text{куб.}\,дм \\ 65 \\ \hline 420 \\ 504\ \ \\ \hline 5460\ \text{куб.}\,дм \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 5460\ \text{куб.}\ дм \\ 40 \\ \hline 218400\ \text{куб.}\ дм = \\ =218\ \text{куб.}\ м\ 400\ \text{куб.}\ дм \end{array}$$

Какой объем помещения требуется учащимся?

5 куб. *м* × 36 = 180 куб. *м*.

Ответ: помещение класса достаточно.

Вычисление объема прямоугольного параллелепипеда по данному основанию его и высоте и обратные задачи.

Прямая задача: даны площадь основания параллелепипеда и высота, вычислить объем.

Предложим ученикам задачу: площадь основания параллелепипеда 12 кв. *см*, высота 1 *см*. Узнать его объем.

Ученик должен себе представить параллелепипед, у которого нижняя грань (основание) разделена на клетки — „на квадратные сантиметры“, таких квадратных сантиметров содержится в ней 12. Поставим мысленно на каждый

квадратный сантиметр основания по кубическому сантиметру: всего потребуется 12 кубических сантиметров. Объем параллелепипеда равен 12 куб. *см*.

Будем брать параллелепипеды с большей и большей высотой:

Площадь основания	Высота	Объем
12 кв. *см*	2 *см*	12 куб. *см* × 2 = 24 куб. *см*
12 кв. *см*	5 *см*	12 куб. *см* × 5 = 60 куб. *см*
12 кв. *см*	10 *см*	12 куб. *см* × 10 = 120 куб. *см*.

Вычислим объем каждого параллелепипеда. Поставим мысленно по кубическому сантиметру на каждый квадратный сантиметр основания параллелепипеда: получим слой, объем которого равен 12 куб. *см*. Таких слоев в параллелепипеде будет 2. Поэтому умножим 12 куб. *см* на 2, получим 24 куб. *см*. Запишем:

12 куб. *см* × 2 = 24 куб. *см* и т. д.

Сделаем ряд подобных же задач, записывая их решение так, как это сделано выше. Сопоставим, с одной стороны, площадь основания параллелепипеда (12 кв. *см*) и высоту (2 *см*), а с другой, вычисление объема (12 куб. *см* × 2 = = 24 куб. *см*), не обращая внимания при этом на меры. Чтобы получить 24, мы умножили 12 на 2, иными словами: чтобы получить объем параллелепипеда, мы умножили площадь его основания на высоту. Так же просматриваем решения других задач и выводим правило в общей форме: чтобы вычислить объем параллелепипеда, надо его основание умножить на высоту.

Обратные задачи. Задаче о вычислении объема параллелепипеда по данному основанию его и высоте соответствуют две обратные задачи:

а) Даны объем прямоугольного параллелепипеда и площадь основания, требуется вычислить высоту.

б) Даны объем прямоугольного параллелепипеда и высота, требуется вычислить площадь его основания.

Эти задачи решаются на основании соотношения между умножением и делением. Немалое затруднение при записи их решения представляет наименование мер. В согласии с учением о размерности величин правильная запись решений прямой и обратных задач должна бы быть такая:

$$12\ см^2 \times 2\ см = 24\ см^3$$
$$24\ см^3 : 12\ см^2 = 2\ см$$
$$24\ см^3 : 2\ см = 12\ см^2$$

Но такая запись совершенно недоступна для детей четвертого года. Для этого возраста более подходят такие записи:

12 куб. *см* × 2 = 24 куб. *см*	Ответ: 24 куб. *см*
24 куб. *см* : 12 куб. *см* = 2	Ответ: 2 *см*
24 куб. *см* : 2 = 12 куб. *см*	Ответ: 12 кв. *см*

Но эти записи требуют длинных объяснений. Поэтому *лучше эти записи освобождать от наименований мер*, решение же обратных задач основывать на соотношении между умножением и делением.

Подготовить учеников к решению обратных задач можно так: предложим прямую задачу на вычисление объема и две обратных.

а) Площадь основания параллелепипеда 18 кв. *см*, высота — 5 *см*. Вычислить его объем.

б) Объем параллелепипеда 90 куб. *см*, а высота 5 *см*. Вычислить площадь его основания.

в) Объем параллелепипеда 90 куб. *см*, а площадь его основания 18 кв. *см*. Вычислить его высоту.

Решим первую задачу: 18 · 5 = 90 (куб. *см*).

Решим вторую задачу: чтобы вычислить объем параллелепипеда (90 куб. *см*), надо было площадь его основания умножить на высоту (5 *см*):

площ. основ. × 5 = 90.

Какое число надо умножить на 5, чтобы получить 90? Как найти это число?

90 : 5 = 18 (кв. *см*).

Решим третью задачу: чтобы вычислить объем параллелепипеда 90 куб. *см*, умножили площадь его основания 18 кв. *см*. на высоту:

18 × высоту = 90.

На какое число надо умножить 18, чтобы получить 90? Как найти это число?

90 : 18 = 5 (*см*).

Рассуждая таким образом, решим ряд обратных задач. Когда ученики усвоят метод рассуждения, можно ограничиваться записью только деления.

Задачи №№ 210—213 Сборн. задач.

Закончить проработку вопроса можно составлением обратных задач учащимися по заданной прямой задаче.

Раздробление и превращение именованных чисел, выражающих объем. Раздробление и превращение кубических мер производится тем же способом, как и линейных. Но ученики, которые правильно производят раздробление и превращение именованных чисел с линейными мерами, допускают ошибки, как только переходят к этим же операциям с кубическими мерами. Причиной служит разница в единичных отношениях линейных и кубических мер. Чтобы избежать этих ошибок, надо первые упражнения в раздроблении и превращении давать с небольшими числами; при решении же их

опираться на образы геометрических тел. Например, прямоугольный брус имеет длину 2 *дм*, ширину 1 *дм* и высоту 1 *дм*. Каков его объем? Ответ: 2 куб. *дм*. Сколько в нем кубических сантиметров? Ответ: 2000 куб. *см*.

Предлагая для решения примеры на раздробление, следует повторить с учениками кубические меры с подробными объяснениями их единичных отношений.

Вычисления при раздроблении и превращении производятся в уме с последующей записью результатов. Сделаем примеры на раздробление и превращение.

Раздробим	3	куб. *дм* 250 куб. *см* в кубические сантиметры
	1	куб. *дм* = 1 000 куб. *см*
	3	„ „ = 3 000 куб. *см*
	3	куб. *дм* 250 куб. *см* = 3 250 куб. *см*

Превратим	5 350	куб. *дм* в кубические метры
	1 000	куб. *дм* = 1 куб. *м*
	5 000	„ „ = 5 „ „
	5 350	куб. *дм* = 5 куб. *м* 350 куб. *дм*

Последовательность упражнений на раздробление:

а) Раздробление простого именованного числа.

б) Раздробление составного именованного числа.

Последовательность упражнений на превращение:

а) Превращение простого именованного числа в простое.

б) Превращение простого именованного числа в составное.

Шар и окружность.

Шар и окружность. С формой шара и окружностью учащиеся уже знакомы. На четвертом году необходимо уточнить понятия и термины, относящиеся к этим фигурам.

Окружности вычерчивают при помощи циркуля или остроконечной ножки, которая надевается на карандаш.

При черчении окружности точка, в которой находится неподвижное острие циркуля, называется центром или серединой окружности. Все точки окружности лежат на равном расстоянии от центра. Это видно из способа черчения окружности, измерять эти расстояния не надо. Поэтому все радиусы окружности равны. Поперечник или диаметр окружности состоит из двух радиусов. Диаметр делит круг пополам.

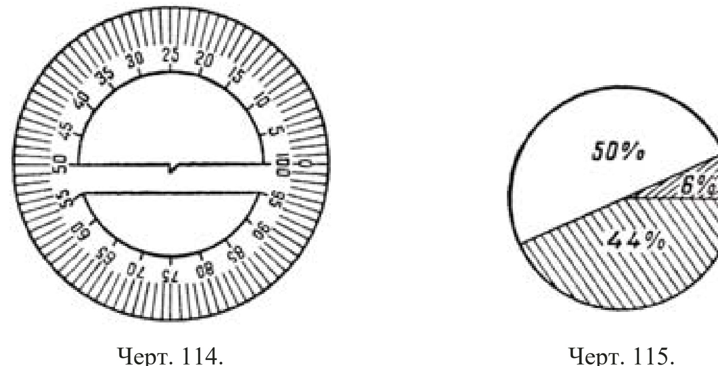
Учащиеся должны различать окружность и круг. Окружность — только линия, круг — часть плоскости.

У шара все точки, взятые на его поверхности, находятся на равном расстоянии от его центра. Это свойство шара, которое есть его определение, усматривается непосредственно из его формы.

Моделью шара может служить мяч, глобус.

Учащиеся упражняются в черчении концентрических, пересекающихся и касающихся окружностей; вычерчивают красивые орнаменты.

Круговая диаграмма. Чтобы чертить диаграммы, ученики должны познакомиться с круговым транспортиром. Круговой транспортир есть круг, разделенный на 100 равных клинышков, или секторов. В учебнике на стр. 46



Черт. 114. Черт. 115.

дано подробное описание кругового транспортира, указана и цель его. Эту цель необходимо выяснить ученикам при черчении круговых диаграмм. Например:

а) Изобразить состав почвы, если известно, что на 100 весовых частей ее приходится: перегноя 6 ч., глины 50 ч. и песку 44 ч.

б) Изобразить состав посевной площади СССР в 1933 г., если у совхозов было 11% ее, у колхозов 74%, у единоличников 15%.

Учащиеся чертят в тетрадях круг *того же радиуса*, как и круговой транспортир. Этот круг будет изображать все 100 частей почвы. Теперь надо изобразить 6 частей. Для этого переносим с помощью циркуля дугу в 6 делений с транспортира на окружность в тетради: концы ее соединяем с центром. Получили изображение 6 частей почвы или перегноя, и т. д. На диаграмме почва представлена в виде круга, а ее части в виде секторов.

Подобным же образом представляем в виде круговой диаграммы состав посевной площади СССР.

Итак, с помощью круговой диаграммы наглядно изображают целое и его части. При этом части *должны быть уже выражены* в процентах, так как на четвертом году нахождение процентного отношения двух чисел трудно для учащихся.

СОДЕРЖАНИЕ
